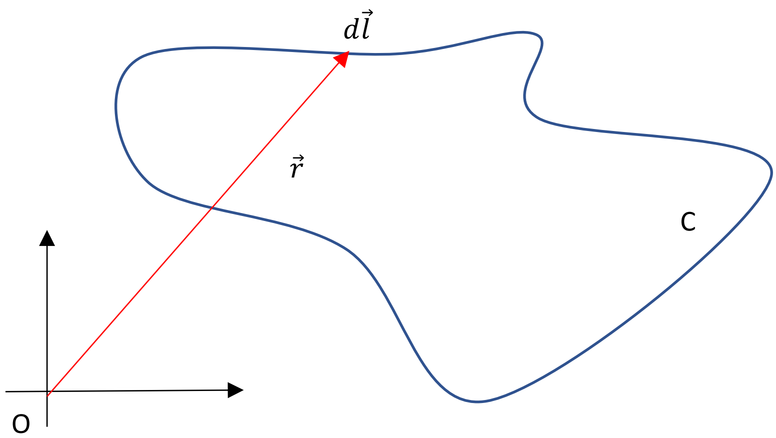
Μελέτη δυναμικής κατάστασης ρευματοφόρου καμπύλης εντός μαγνητικού πεδίου

Τερλεμές Σπύρος
30-9-2020
spyrosssterlemes@gmail.com

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Έστω ότι έχουμε μια καμπύλη C στον χώρο, που διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα πυκνότητας $\vec{j}(\vec{r})$. Αν στον χώρο της καμπύλης υπάρχει μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$ τότε η καμπύλη δέχεται μαγνητική (Laplace) δύναμη έστω $\vec{F}$. Ταυτόχρονα αν θεωρήσουμε μια διανυσματική βάση με αρχή το O, η καμπύλη δέχεται ως προς το O και ροπή $\vec{M}$ λόγω των επιμέρους δυνάμεων $d\vec{F}$ στα διαφορικά της τμήματα. Στην ανάλυση αυτή μελετώ την ροπή που ασκείται στην καμπύλη



ΡΟΠΗ ΣΤΗΝ ΚΑΜΠΥΛΗ

Κάθε στοιχειώδης δύναμη $d\vec{F}$ ασκεί μια ροπή στο πλαίσιο ως προς το σύστημα αναφοράς που έχουμε ορίσει. Η συνολική ροπή που επιδρά στην καμπύλη θα είναι λοιπόν:

$$\vec{M} = \oint_C \vec{r} \times I(d\vec{l} \times \vec{B}) = I \oint_C \vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B}) = I \oint_C d\vec{l}\,(\vec{r} \cdot \vec{B}) - I\vec{B} \oint_C \vec{r}\, d\vec{l}$$

(1)

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Stokes για το δεύτερο ολοκλήρωμα πάνω στην καμπύλη C και έχουμε τον μετασχηματισμό σε ολοκλήρωμα επιφάνειας:

$$\oint_C \vec{r}\, d\vec{l} = \iint (\vec{\nabla} \times \vec{r}) d\vec{S} = 0$$

(2)

Αφού το διανυσματικό πεδίο $G(\vec{r}) = \vec{r}$ είναι αστρόβιλο, άρα $\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0.$ Οπότε σύμφωνα με την (1) και την (2) η ροπή στην ρευματοφόρο καμπύλη θα είναι:

$$\vec{M} = I \oint_C (\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{l}$$

(3)

Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\iota}$ της διανυσματικής βάσης, έχουμε:

$$\vec{M} \cdot \vec{\iota} = I \oint_C \vec{\iota} \left(\vec{r} \cdot \vec{B}\right) d\vec{l}$$

(4)

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Stokes για την διανυσματική συνάρτηση στην (4) και προκύπτει:

$$\vec{M} \cdot \vec{\iota} = I \iint (\vec{\nabla} \times \vec{\iota}(\vec{r} \cdot \vec{B})) d\vec{S}$$

(5)

Ο στροβιλισμός της συνάρτησης $f(\vec{r}) = \vec{\iota}\left(\vec{r} \cdot \vec{B}\right)$ δίνεται από την 3 x 3 ορίζουσα ως εξής:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\iota}\left(\vec{r} \cdot \vec{B}\right) = \begin{vmatrix} \vec{\iota} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \vec{r} \cdot \vec{B} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{\jmath}\, \frac{\partial\left(\vec{r} \cdot \vec{B}\right)}{\partial z} - \vec{k}\, \frac{\partial\left(\vec{r} \cdot \vec{B}\right)}{\partial y}$$

(6)

Όμως ισχύει ότι:

$$\vec{r} \cdot \vec{B} = xB_x + yB_y + zB_z$$

(7)

Οπότε η σχέση (6) γράφεται σύμφωνα με την βοήθεια της (7):

$$\vec{\nabla} \times \vec{\iota}\left(\vec{r} \cdot \vec{B}\right) = \vec{\jmath}\, B_z - \vec{k} B_y$$

(8)

Παρατηρούμε όμως ότι αν πάρουμε το εξωτερικό γινόμενο του μαγνητικού πεδίου και του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{\iota}$ έχουμε την νέα ορίζουσα:

$$\vec{B} \times \vec{\imath} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{\jmath}\, B_z - \vec{k}\, B_y$$

(9)

Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι δύο ορίζουσες είναι ισοδύναμες, άρα ισχύει ότι:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\imath}\big(\vec{r} \cdot \vec{B}\big) = \vec{B} \times \vec{\imath}$$

(10)

Οπότε τώρα μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον στροβιλισμό της διανυσματικής συνάρτησης $f(\vec{r})$ με το εξωτερικό γινόμενο $\vec{B} \times \vec{\imath}$ και να γραφτεί ξανά η (5) ως:

$$\vec{M} \cdot \vec{\imath} = I \iint (\vec{B} \times \vec{\imath}) d\vec{S} = I \iint (\vec{B} \times d\vec{S}) \vec{\imath}$$

(11)

Χωρίζοντας τα μέλη της (17) είναι:

$$\vec{\imath}\left(\vec{M} - I\vec{B} \times \iint d\vec{S}\right) = 0$$

(12)

Οπότε λοιπόν έχουμε υπολογίσει την ροπή που ασκείται σε μια ρευματοφόρο καμπύλη C επιφάνειας S:

$$\vec{M} = I\vec{B} \times \vec{S}$$

(13)

Αξίζει να αναφερθούν τα εξής:

- Η σχέση (13) ισχύει για ομογενή μαγνητικά πεδία
- Η επιφάνεια δεν είναι αναγκαστικό να είναι επίπεδη. Με άλλα λόγια η σχέση (13) εκφράζει την ροπή μιας κατανομής ρευμάτων στον R^3 χώρο.
- Το σύστημα αναφοράς από το οποίο μετράμε την ροπή δεν έχει σημασία. Δηλαδή από όποιο σημείο και αν υπολογίσουμε την ροπή θα βγάλουμε το ίδιο αποτέλεσμα.
- Η μέγιστη τιμή της ροπής $\vec{M}$ είναι $M = IBS$ όταν το πεδίο είναι κάθετο στο διάνυσμα της επιφάνειας.
- Η ροπή είναι μηδενική όταν το πεδίο είναι παράλληλο στο διάνυσμα επιφάνειας.

Έστω τώρα ότι δεν γνωρίζουμε την επιφάνεια $\vec{S}$ και πρέπει να την υπολογίσουμε. Αν η επιφάνεια είναι στο επίπεδο xy τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Green συσχετίζοντας τις διανυσματικές συναρτήσεις που περιγράφουν την καμπύλη. Δηλαδή θα ισχύει:

$$\iint d\vec{S} = \frac{1}{2}\oint_C \vec{r} \times d\vec{r}$$

(14)

Οπότε η ροπή μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα:

$$\vec{M} = \frac{1}{2} I\vec{B} \times \oint_C \vec{r} \times d\vec{r}$$

(15)