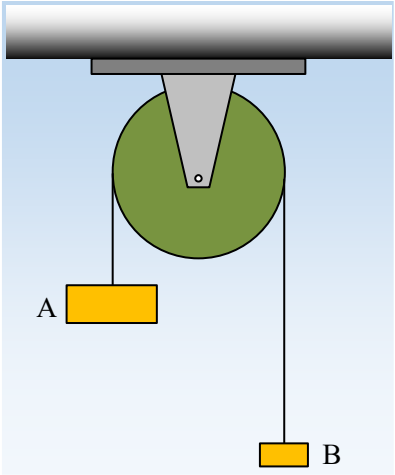
Όταν το νήμα γλιστράει στο αυλάκι της τροχαλίας



Η τροχαλία του σχήματος ακτίνας R=0,2m και μάζας M=3,5kg μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο της Ο. Περνάμε ένα μη εκτατό και αβαρές νήμα από το αυλάκι (ελάχιστου βάθους…) της τροχαλίας και στα άκρα του δένουμε δύο σώματα Α και Β με μάζας m_1=0,2kg και m_2=0,1kg, τα οποία αφήνουμε να κινηθούν, από τις θέσεις που φαίνονται στο σχήμα. Αν το σώμα Α πέφτει με επιτάχυνση α_1=1m/s^2, να βρεθούν:

i) Η γωνιακή επιτάχυνση που αποκτά η τροχαλία.

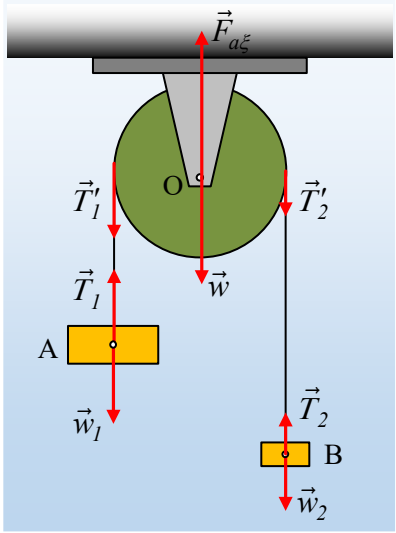
ii) Η ενέργεια που μεταφέρεται στο υπόλοιπο σύστημα από το σώμα Α, μέχρι τη στιγμή t_1=2s.

iii) Να αποδείξετε ότι το νήμα γλιστράει στο αυλάκι της τροχαλίας.

iv) Πόση θερμότητα παράγεται λόγω τριβής μεταξύ νήματος και τροχαλίας, μέχρι τη στιγμή t_1.

Δίνεται g=10m/s^2 και η ροπή αδράνειας της τροχαλίας I= ½ MR^2.

Απάντηση:



Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα του συστήματος.

i) Εφαρμόζουμε το 2ο νόμο του Νεύτωνα για κάθε σώμα χωριστά:

$$\Sigma F_1=m_1\cdot\alpha_1 \rightarrow m_1g-T_1=m_1\alpha_1 \rightarrow T_1=m_1(g-\alpha_1) \rightarrow$$

$$T_1=0,2\cdot(10-1)N=1,8N$$

Επιτάχυνση α_1 με φορά προς τα πάνω έχει και το Β σώμα, οπότε:

$$\Sigma F_2=m_2\alpha_2 \rightarrow T_2-m_2g=m_2\cdot\alpha_1 \rightarrow T_2=m_2(g+\alpha_1)\rightarrow$$

$$T_2=0,1\cdot(10+1)N=1,1N$$

Όμως για τα μέτρα τω δυνάμεων, T_1'= T_1 και T_2'= T_2, οπότε για την τροχαλία, θα έχουμε:

$$\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_1'\cdot R-T_2'\cdot R = ½\, MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{2(T_1-T_2)}{MR}=\frac{2(1,8-1,1)}{3,5\cdot 0,2}rad/s^2=2rad/s^2.$$

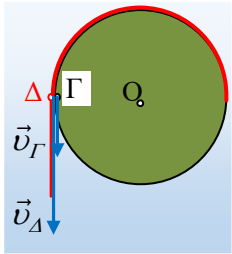
ii) Μέχρι τη στιγμή t_1=2s το Α σώμα έχει κατέβει κατά $h=\frac{1}{2}a_1t_1^2=\frac{1}{2}1\cdot 2^2 m=2m$, έχοντας αποκτήσει ταχύτητα $\upsilon_1=\alpha_1t_1=1\cdot 2m/s=2m/s$, ίση κατά μέτρο με την ταχύτητα του Β σώματος.

Η ενέργεια που αφαιρείται από το σώμα Α και μεταφέρεται στο υπόλοιπο σύστημα, είναι ίση με το έργο

της τάσης του νήματος T_1:

$$W_{T1}=T_1\cdot\Delta y\cdot\sigma\upsilon\nu 180°=-T_1\cdot h=-1,8\cdot 2J=-3,6J$$

iii) Τη χρονική στιγμή t_1 η τροχαλία στρέφεται αριστερόστροφα, έχοντας γωνιακή ταχύτητα μέτρου:



$$\omega_1=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t_1=2\cdot 2rad/s=4rad/s.$$

Ας πάρουμε ένα σημείο Γ της τροχαλίας, στη θέση που το κατακόρυφο νήμα φτάνει στην τροχαλία. Το σημείο Γ έχει ταχύτητα εφαπτόμενη στον δίσκο (κατακόρυφη) με μέτρο $\upsilon_\Gamma=\omega_1\cdot R=4\cdot 0,2m/s=0,8m/s$.

Έστω Δ το αντίστοιχο σημείο του νήματος. Το σημείο αυτό έχει την ταχύτητα του νήματος, μέτρου $\upsilon_1=2m/s$.

Βλέπουμε ότι τα δύο σημεία, που είναι δίπλα - δίπλα στο νήμα και στην τροχαλία έχουν διαφορετικές ταχύτητες, πράγμα που σημαίνει ότι υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ τους ή ισοδύναμα το νήμα ολισθαίνει στο αυλάκι της τροχαλίας.

iv) Στο ερώτημα ii) υπολογίσαμε ότι ενέργεια 3,6J αφαιρέθηκε από το σώμα Α, μέσω του νήματος. Από αυτήν, το σώμα Β πήρε ένα μέρος, το οποίο εμφανίζεται ως αύξηση της δυναμικής του ενέργειας κατά m_2gh και ως κινητική ενέργεια:

$$E_2=\Delta U+K_2=m_2gh+\frac{1}{2}m_2\upsilon_1^2=0,1\cdot 10\cdot 2J+\frac{1}{2}0,1\cdot 2^2J=2,2J$$

Ένα άλλο μέρος έχει μετατραπεί σε κινητική ενέργεια της τροχαλίας:

$$K_\tau=\frac{1}{2}I\omega_1^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\cdot\omega_1^2=\frac{1}{4}3,5\cdot 0,2^2\cdot 4^2J=0,56J$$

Αλλά τότε η ενέργεια που μεταφέρθηκε μέσω του νήματος στο υπόλοιπο σύστημα και δεν εμφανίζεται ως μηχανική ενέργεια στο σύστημα, εμφανίζεται ως θερμότητα μεταξύ του νήματος και της τροχαλίας:

$$Q_\theta=|W_{T1}|-E_2-K_\tau=3,6J-2,2J-0,56J=0,84J.$$

Εναλλακτικά και λίγο «τυποποιημένα», μπορούμε να εφαρμόσουμε την διατήρηση της ενέργειας για το σύστημα, θεωρώντας την αρχική θέση του σώματος Β ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας:

$$U_{1_{\alpha\rho\chi}}=\left(U_{1_{\tau\varepsilon\lambda}}+K_1\right)+\left(U_{2_{\tau\varepsilon\lambda}}+K_2\right)+K_{\tau\rho}+Q_\theta\rightarrow$$

$$m_1gh_1=m_1g\left(h_1-h\right)+\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+m_2gh+\frac{1}{2}m_2\upsilon_1^2+\frac{1}{2}I\omega_1^2+Q_\theta\rightarrow$$

$$Q_\theta=m_1gh-\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2-m_2gh-\frac{1}{2}m_2\upsilon_1^2-\frac{1}{2}I\omega_1^2=\ldots=0,84J$$

dmargaris@gmail.com