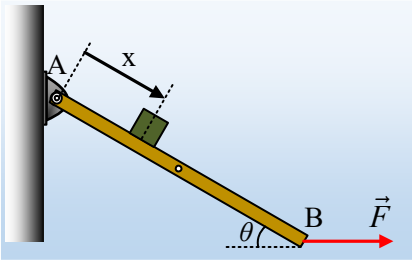
Θα την καταστήσουμε οριζόντια;



Μια ομογενής δοκός ΑΒ μήκους 2m και μάζας M=12kg μπορεί να στρέφεται γύρω από άρθρωση στο άκρο της Α και ισορροπεί όπως στο σχήμα, σχηματίζοντας γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση, με την βοήθεια οριζόντιας δύναμης F, την οποία ασκούμε στο άκρο της Β.

i) Να υπολογιστεί το μέτρο της απαιτούμενης για την ισορροπία, δύναμης F.

ii) Αφήνουμε πάνω στη δοκό, στο άκρο της Α, ένα σώμα Σ μάζας m=3kg, το οποίο ολισθαίνει κατά μήκος της δοκού και μετά από χρόνο 2s την εγκαταλείπει από το άκρο της Β, ενώ η δοκός παραμένει ακίνητη στην θέση της.

α) Να βρεθεί ο συντελεστής τριβής μεταξύ του σώματος Σ και της δοκού.

β) Να υπολογιστεί η ροπή της δύναμης που ασκεί το σώμα Σ στη δοκό, τη στιγμή t_1=1s, ως προς το άκρο Α της δοκού.

γ) Να βρεθεί πώς μεταβάλλεται το μέτρο της απαιτούμενης για την ισορροπία δύναμης F και να γίνει το διάγραμμα F-x, όπου x η μετατόπιση του σώματος Σ.

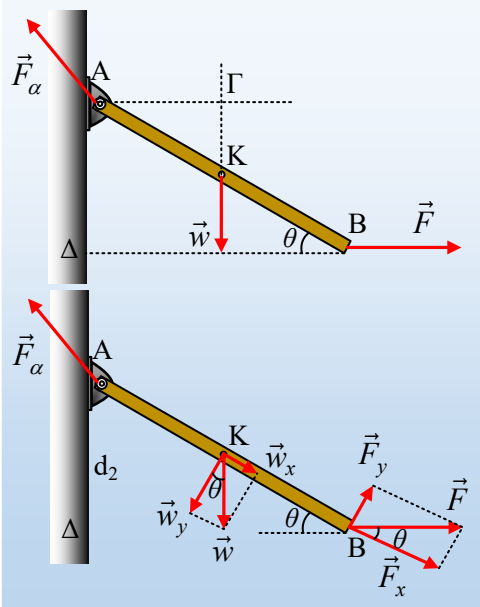
iii) Υποστηρίζεται η πρόταση ότι αν αυξήσουμε το μέτρο της ασκούμενης οριζόντιας δύναμης F, μπορούμε να πετύχουμε να ισορροπήσει η ράβδος, ελαττώνοντας την γωνία θ (την κλίση της δοκού).

α) Να εξετάσετε αν η παραπάνω πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη.

β) Μπορούμε να καταστήσουμε την δοκό οριζόντια, με κατάλληλη τιμή του μέτρου της δύναμης F;

Δίνεται για την γωνία θ, ημθ=0,6 και συνθ=0,8, ενώ g=10m/s^2.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό, όπου F_α η δύναμη από την άρθρωση. Από την ισορροπία τη δοκού παίρνουμε:

$$\Sigma F=0 \ (1) \ \text{και} \ \Sigma\tau=0 \ (2)$$

Εφαρμόζουμε την (2) ως προς το άκρο Α και θεωρώντας τις αριστερόστροφες ροπές ως θετικές, παίρνοντας:

$$\Sigma\tau_A=0 \rightarrow -w\cdot(A\Gamma) + F\cdot(A\Delta) =0 \rightarrow$$

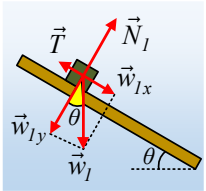
$$F\cdot\ell\cdot\eta\mu\theta=Mg\cdot \tfrac{1}{2}\,\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\theta \ (3) \rightarrow$$

$$F=\frac{Mg\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}{2\cdot\eta\mu\theta}=\frac{12\cdot10\cdot0,8}{2\cdot0,6}N=80N$$

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να αναλύσουμε τις δυνάμεις όπως στο κάτω σχήμα και να παίρναμε:

$$\Sigma\tau_A=0 \rightarrow F_y\cdot\ell-w_y\cdot \tfrac{1}{2}\,\ell=0 \rightarrow F\cdot\ell\cdot\eta\mu\theta=Mg\cdot \tfrac{1}{2}\,\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\theta \quad (3)\ldots.$$

ii) Για το σώμα Σ, έχουμε με βάση το διπλανό σχήμα:



$$\Sigma F_y=0 \rightarrow N_1=mg\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=3\cdot10\cdot0{,}8N=24N.$$

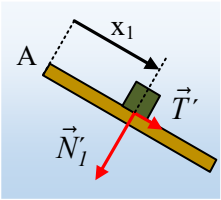
$$\Sigma F_x=m\cdot\alpha \rightarrow mg\cdot\eta\mu\theta-\mu N_1=m\cdot\alpha \quad (4)$$

α) Από την (3) συμπεραίνουμε ότι η κίνηση του σώματος Σ είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, για την οποία $\Delta x = \tfrac{1}{2}\,\alpha\cdot t^2$ οπότε:

$$\alpha=\frac{2\cdot\Delta x}{t^2}=\frac{2\cdot\ell}{t^2}=\frac{2\cdot2}{2^2}m/s^2=1m/s^2 \xrightarrow{(4)}$$

$$\mu=\frac{m\left(g\cdot\eta\mu\theta-\alpha\right)}{N_1}=\frac{3\left(10\cdot0{,}6-1\right)}{24}=\frac{5}{8}$$

β) Τη στιγμή t_1 το σώμα Σ απέχει από το άκρο Α απόσταση:

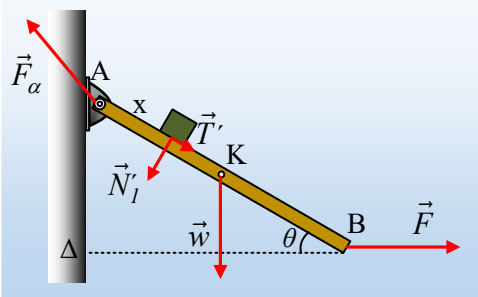


$$x_1=\frac{1}{2}at_1^2=\frac{1}{2}1\cdot1^2m=0{,}5m$$

Το σώμα Σ ασκεί στη δοκό τις αντιδράσεις της N_1 και της τριβής, όπως στο σχήμα, οπότε η ζητούμενη ροπή τους ως προς την άρθρωση στο άκρο Α, έχει τιμή:

$$\tau_\Sigma=-N_1'\cdot x_1+T'\cdot0=-24N\cdot0{,}5m=-12\,N\cdot m$$

γ) Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω δυνάμεις που το σώμα Σ ασκεί στην δοκό, η εξίσωση (2) παίρνει τη μορφή:



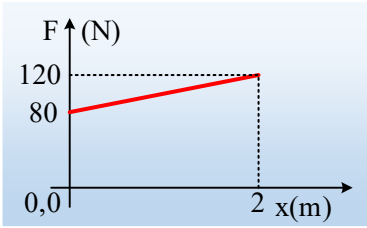
$$\Sigma\tau_A=0 \rightarrow -w\cdot(A\Gamma)-N_1'\cdot x+F\cdot(A\Delta)=0 \rightarrow$$

$$F\cdot\ell\eta\mu\theta=Mg\cdot\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\theta+N_1'\cdot x \xrightarrow{\text{αντικατάσταση}}$$

$$F\cdot2\cdot0{,}6=12\cdot10\cdot1\cdot0{,}8+24\cdot x \rightarrow$$

$$F=80+20x \quad (S.I.)$$

Η γραφική παράσταση της τελευταίας σχέσης, έχει την μορφή του διπλανού σχήματος.



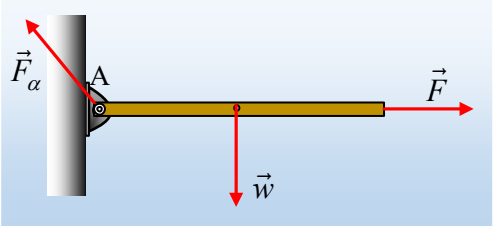
iii) Έστω ότι η ράβδος ισορροπεί με την επίδραση μιας οριζόντιας δύναμης σχηματίζοντας με την οριζόντια διεύθυνση γωνία φ. Τότε η εξίσωση (3) παίρνει την μορφή:

$$F'\cdot\ell\cdot\eta\mu\varphi=Mg\cdot \tfrac{1}{2}\,\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi \rightarrow F'\cdot\epsilon\varphi\varphi=\tfrac{1}{2}\,Mg=60\ (S.I.) \quad (5)$$

α) Όταν μικραίνει η κλίση της δοκού (μικραίνει η γωνία φ), τότε μικραίνει και η εφφ οπότε από την παραπάνω εξίσωση συμπεραίνουμε ότι αυξάνεται το μέτρο της απαραίτητης δύναμης F, αφού το γινόμενο F·εφφ παραμένει σταθερό. Η πρόταση είναι σωστή.

β) Από την εξίσωση (5), βρίσκουμε ότι όταν η ράβδος γίνει οριζόντια, τότε φ=0 και εφφ =0 οπότε:

$$F \cdot 0 = 60$$



Πράγμα αδύνατο! Δεν γίνεται με άλλα λόγια, ασκώντας οριζόντια δύναμη στο άκρο Β, να καταστήσουμε την ράβδο οριζόντια.

Εναλλακτικά ας δούμε τι σημαίνει οριζόντια δοκός. Η κατάσταση εμφανίζεται στο σχήμα. Αλλά τότε παίρνοντας τις ροπές ως προς το άκρο Α θα έχουμε:

$$\Sigma\tau_A = -\, w \cdot \tfrac{1}{2}\, \ell \neq 0$$

Πράγμα που σημαίνει ότι δεν μπορεί να υπάρξει τέτοια ισορροπία με οριζόντια δύναμη στο άκρο Β.

dmargaris@gmail.com