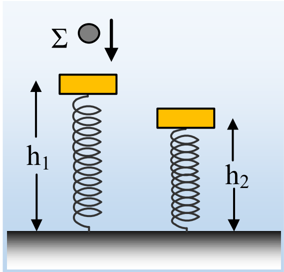
Μια κρούση και η ταλάντωση που προκαλεί

Μια πλάκα μάζας M=2kg ηρεμεί στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου, το άλλο άκρο του οποίου στηρίζεται στο έδαφος, σε ύψος h_1=0,4m. Σε μια στιγμή t=0, μια σφαίρα η οποία πέφτει κατακόρυφα συγκρούεται με την πλάκα, η οποία στη συνέχεια αρχίζει να εκτελεί μια κατακόρυφη ΑΑΤ, κατά την οποία το ελάχιστο ύψος από το έδαφος που φτάνει είναι h_2=0,3m, τη στιγμή t_1=(π/20)s=0,157s, για πρώτη φορά, ενώ η σφαίρα κινείται προς τα πάνω.



i) Πόση ενέργεια μεταφέρθηκε στην πλάκα στη διάρκεια της κρούσης;

ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση του ύψους της πλάκας από το έδαφος σε συνάρτηση με το χρόνο.

iii) Σε μια στιγμή t_2 η πλάκα και η σφαίρα έχουν τις ίδιες ταχύτητες και τις ίδιες επιταχύνσεις. Αν οι τιμές αυτές για την πλάκα είναι η πρώτη φορά που επιτυγχάνονται:

α) Να βρεθεί η στιγμή t_2.

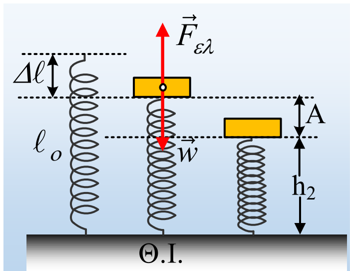
β) Να υπολογιστεί η ταχύτητα της σφαίρας αμέσως μετά την κρούση.

γ) Αν η σφαίρα έχει μάζα m=1/6 kg, να εξετάσετε αν η παραπάνω κρούση είναι ή όχι ελαστική.

Δίνεται g=10m/s^2.

Απάντηση:

i) Τη στιγμή t_1 που η πλάκα βρίσκεται στο ελάχιστο ύψος h_2, έχει μηδενική ταχύτητα και η θέση αυτή είναι θέση πλάτους, συνεπώς το πλάτος ταλάντωσης είναι $A=h_1-h_2$=0,4m-0,3m=0,1m, ενώ t_1= ¼ T, οπότε:



$$T = 4t_1 \to 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 4t_1 \to 4\pi^2\frac{M}{k} = 16t_1^2 \to$$

$$k = \frac{4\pi^2 M}{16\left(\frac{\pi}{20}\right)^2} = \frac{4\pi^2\cdot 2\cdot 400}{16\pi^2}N/m = 200N/m$$

Οπότε η ενέργεια που μεταφέρθηκε στην πλάκα από τη σφαίρα, στη διάρκεια της κρούσης είναι:

$$E = E_\tau = \frac{1}{2}M\upsilon_{2,max}^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}200\cdot 0{,}1^2 J = 1J$$

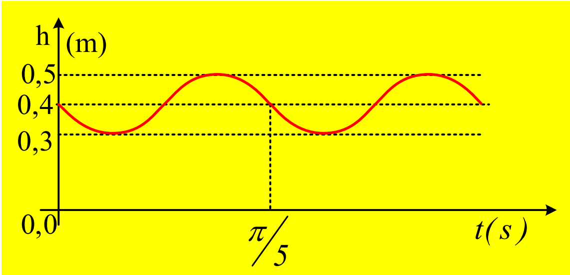
ii) Θεωρώντας την προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική, η πλάκα ξεκινά την ταλάντωσή της από την θέση ισορροπίας, κινούμενη προς την αρνητική κατεύθυνση, με $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{200}{2}}rad/s = 10rad/s$, οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσής της από την θέση ισορροπίας της, έχει τη μορφή:

$$y = A\cdot\eta\mu(\omega t+\pi) = 0{,}1\cdot\eta\mu(10t+\pi) \text{ (S.I.)}$$

Αλλά τότε κάθε στιγμή, η πλάκα βρίσκεται σε ύψος:

$$h = h_1 + y = 0{,}4 + 0{,}1 \cdot \eta\mu(10t + \pi) = 0{,}4 - 0{,}1\eta\mu(10t) \quad \text{(S.I.)}$$

Με βάση αυτά, η ζητούμενη γραφική παράσταση παίρνει τη μορφή:



iii) Η σφαίρα κινείται με σταθερή επιτάχυνση ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας g. Αντίθετα η πλάκα έχει μεταβαλλόμενη επιτάχυνση, αφού σε κάθε θέση, εκτός του βάρους δέχεται και την δύναμη του ελατηρίου. Αλλά τότε οι επιταχύνσεις θα γίνουν ίσες όταν το ελατήριο αποκτήσει το φυσικό μήκος του, οπότε στην πλάκα ασκείται μόνο το βάρος, έχοντας επιτάχυνση g!

α) Στην θέση ισορροπίας της πλάκας ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = w \rightarrow k \cdot \Delta\ell = Mg \rightarrow \Delta\ell = \frac{Mg}{k} = \frac{2 \cdot 10}{200} m = 0{,}1m$$

Βλέπουμε ότι η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου είναι και θέση πλάτους, στην οποία η πλάκα θα φτάσει για πρώτη φορά, τη χρονική στιγμή:

$$t_2 = \frac{3}{4}T = \frac{3}{4}\frac{\pi}{5}s = 3\frac{\pi}{20}s = 3 \cdot 0{,}157s = 0{,}47s$$

β) Τη στιγμή t_2 η πλάκα βρίσκεται σε ακραία θέση, έχοντας μηδενική ταχύτητα. Αλλά τότε και η σφαίρα θα έχει μηδενική ταχύτητα, ευρισκόμενη στο μέγιστο ύψος, της κατακόρυφης βολής που εκτελεί. Αν λοιπόν αμέσως μετά την κρούση αποκτά ταχύτητα με φορά προς τα πάνω, μέτρου υ_1, θα ισχύει για την κίνησή της:

$$\upsilon_\sigma = \upsilon_1 - gt \xrightarrow{\upsilon_\sigma = 0} \upsilon_1 - gt_2 = 0 \rightarrow$$
$$\upsilon_1 = gt_2 = 10 \cdot 0{,}47m/s = 4{,}7m/s$$

γ) Η πλάκα μετά την κρούση αποκτά ταχύτητα μέτρου:

$$\upsilon_{2,max} = \omega A = 10 \cdot 0{,}1m/s = 1m/s$$

με φορά προς τα κάτω (έστω με αρνητική κατεύθυνση). Οπότε εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση, παίρνουμε:

$$\vec{P}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{P}_{\mu\varepsilon\tau} \rightarrow m\upsilon_0 = m\upsilon_1 + M\upsilon_2 \rightarrow$$
$$\upsilon_0 = \frac{m\upsilon_1 + M\upsilon_2}{m} = \upsilon_1 + \frac{M\upsilon_2}{m} \rightarrow$$
$$\upsilon_0 = -4{,}7m/s + \frac{2 \cdot 1}{1/6} m/s = 7{,}3m/s$$

Υπολογίζουμε την κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων που συγκρούονται, ελάχιστα πριν και ελάχιστα μετά την κρούση:

$$K_{πριν} = \frac{1}{2} m υ_o^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{6} \cdot 7,3^2\, J = 4,44 J$$

$$K_{μετ} = \frac{1}{2} m υ_1^2 + \frac{1}{2} M υ_2^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{6} \cdot 4,7^2\, J + \frac{1}{2} 2 \cdot 1^2\, J = 2,84 J$$

Βλέπουμε ότι εμφανίζεται απώλεια κινητικής ενέργειας, άρα η κρούση δεν είναι ελαστική.

dmargaris@gmail.com