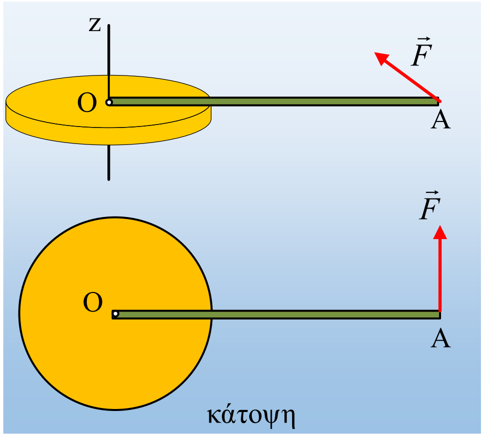
Η ράβδος περιστρέφει και το δίσκο.



Ο οριζόντιος ομογενής δίσκος μπορεί να περιστρέφεται, χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος περνά από το κέντρο του Ο. Γύρω από τον ίδιο άξονα μπορεί να στρέφεται, επίσης χωρίς τριβές και η ομογενής ράβδος ΟΑ, μάζας m=6kg και μήκους ℓ=2m, η οποία στηρίζεται πάνω στο δίσκο. Το σύστημα ηρεμεί.

Κάποια στιγμή t=0 ασκούμε στο άκρο Α της ράβδου μια σταθερού μέτρου δύναμη F=5N, η οποία αρχίζει να περιστρέφει τη ράβδο, παραμένοντας διαρκώς κάθετη σε αυτήν, όπως στο σχήμα (το κάτω σε κάτοψη). Εξαιτίας της τριβής η οποία αναπτύσσεται μεταξύ ράβδου και δίσκου, ο δίσκος αρχίζει και αυτός να στρέφεται γύρω από τον άξονα z. Αν ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου ως προς τον άξονα z έχει μέτρο $8kg\cdot m^2/s^2$, ζητούνται:

i) Να σχεδιαστεί στο σχήμα το διάνυσμα του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της ράβδου και να υπολογιστεί η ροπή της τριβής που ασκείται στη ράβδο, από τον δίσκο.

ii) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ως προς τον άξονα z, καθώς και ο αντίστοιχος, ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του δίσκου, ως προς τον ίδιο άξονα.

iii) Η στροφορμή ως προς τον άξονα z, τη χρονική στιγμή t_1=5s:

α) της ράβδου, β) του δίσκου.

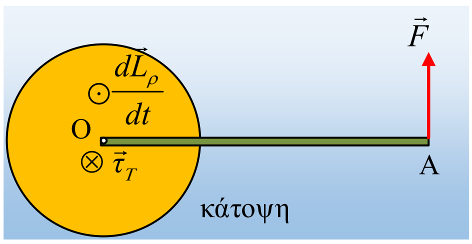
iv) Αν η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα z έχει τιμή $I_δ=2,5kgm^2$, να υπολογιστούν:

α) Η κινητική ενέργεια του δίσκου τη στιγμή t_1.

β) Η μηχανική ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική από 0-t_1 εξαιτίας της τριβής.

Για τη ράβδο $I_{cm}= m\ell^2/12$.

Απάντηση:



i) Η ράβδος αρχίζει να στρέφεται αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της, ως προς τον άξονα z, βρίσκεται πάνω στον άξονα, με φορά προς τα πάνω (στο σχήμα προς τον αναγνώστη, σε κάτοψη), ενώ η ροπή της τριβής έχει αντίθετη κατεύθυνση.

Εφαρμόζουμε το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα για τη ράβδο και παίρνουμε (θεωρούμε θετική την ανθωρολογιακή φορά):

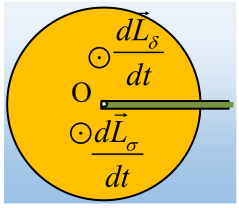
$$\frac{dL_\rho}{dt} = \Sigma\tau = \tau_F + \tau_T \rightarrow \frac{dL_\rho}{dt} = F\cdot\ell + \tau_T \Rightarrow$$

$$\tau_T = \frac{dL_\rho}{dt} - F\cdot\ell = 8kgm^2/s^2 - 5\cdot 2Nm = -2Nm.$$

ii) Για το σύστημα των σωμάτων, από το γενικευμένο νόμο παίρνουμε:

$$\frac{dL_\sigma}{dt} = \Sigma\tau_{F_{\varepsilon\xi}} = \tau_F = F\cdot\ell = 5\cdot 2kgm^2/s^2 = 10kgm^2/s^2.$$

Όμως ο παραπάνω ρυθμός, είναι ίσος με το διανυσματικό άθροισμα (εδώ αλγεβρικό άθροισμα, αφού όλα τα διανύσματα βρίσκονται στον ίδιο άξονα z) των ρυθμών μεταβολής της στροφορμής για ράβδο και δίσκο, οπότε:

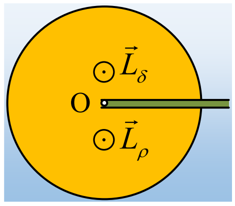


$$\frac{dL_\sigma}{dt} = \frac{dL_\rho}{dt} + \frac{dL_\delta}{dt} \Rightarrow \frac{dL_\delta}{dt} = \frac{dL_\sigma}{dt} - \frac{dL_\rho}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{dL_\delta}{dt} = \frac{dL_\sigma}{dt} - \frac{dL_\rho}{dt} = 10kgm^2/s^2 - 8kgm^2/s^2 = 2kgm^2/s^2$$

Και οι δύο παραπάνω ρυθμοί έχουν την διεύθυνση του άξονα και φορά προς τα έξω, όπως στο σχήμα (σε κάτοψη).

iii) Οι παραπάνω ρυθμοί μεταβολής της στροφορμής παραμένουν σταθεροί (σταθερές ροπές), έτσι οι στιγμιαίοι ρυθμοί είναι ίσοι και με τους μέσους ρυθμούς, οπότε:



α) Για τη ράβδο έχουμε:

$$\frac{dL_\rho}{dt} = \frac{\Delta L_\rho}{\Delta t} = \tau_F + \tau_T = F\cdot\ell + \tau_T \rightarrow \frac{L_{\rho,1} - 0}{t_1 - 0} = F\cdot\ell + \tau_T \Rightarrow$$

$$L_{\rho,1} = (F\cdot\ell + \tau_T)\cdot t_1 = (5\cdot 2 - 2)\cdot 5kgm^2/s = 40kgm^2/s.$$

β) Όμοια για τον δίσκο, ο οποίος στρέφεται με την επίδραση της αντίδρασης της τριβής που ασκείται στη ράβδο, συνεπώς με την επίδραση ροπής $\tau_{T'}$=+2N·m, θα έχουμε:

$$\frac{dL_\delta}{dt} = \frac{\Delta L_\delta}{\Delta t} = \tau_{T'} \rightarrow \frac{L_{\delta,1} - 0}{t_1 - 0} = \tau_{T'} \Rightarrow$$

$$L_{\delta,1} = \tau_{T'}\cdot t_1 = +2\cdot 5kgm^2/s = 10kgm^2/s.$$

iv) Η στροφορμή του δίσκου που υπολογίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα γράφεται:

$$L_{\delta,1} = I_{cm}\omega_{\delta,1} \rightarrow \omega_{\delta,1} = \frac{L_{\delta,1}}{I_{cm}} = \frac{10}{2,5} rad/s = 4rad/s$$

Με την ίδια λογική για τη ράβδο και αφού βρούμε πρώτα τη ροπή αδράνειάς της ως προς το Ο, θα έχουμε:

$$I_o = I_{cm} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + \frac{1}{4}m\ell^2 = \frac{1}{3}m\ell^2 = \frac{1}{3}6\cdot 2^2 kgm^2 = 8kgm^2$$

$$L_{\rho,1} = I_O\omega_{\rho,1} \rightarrow \omega_{\rho,1} = \frac{L_{\rho,1}}{I_O} = \frac{40}{8} rad/s = 5rad/s$$

α) Τη στιγμή t_1 ο δίσκος έχει κινητική ενέργεια:

$$K_\delta = \frac{1}{2} I_{cm} \omega_{\delta,1}^2 = \frac{1}{2} 2,5 \cdot 4^2 J = 20J$$

β) Μέσω του έργου της δύναμης F, δόθηκε στη ράβδο ενέργεια:

$$W_F = \tau_F \cdot \varphi$$

Όπου φ η γωνία κατά την οποία περιεστράφη η ράβδος. Αλλά η περιστροφή της ράβδου έγινε με σταθερή επιτάχυνση:

$$\omega_{\rho,1} = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1 \quad \rightarrow \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega_{\rho,1}}{t_1} = \frac{5}{5} rad/s^2 = 1 rad/s^2$$

Και η ράβδος περιεστράφη κατά γωνία:

$$\varphi = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2 = \frac{1}{2} 1 \cdot 5^2 \, rad = 12,5 rad$$

Οπότε με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$W_F = \tau_F \cdot \varphi = F \cdot \ell \cdot \varphi = 5 \cdot 2 \cdot 12,5J = 125J$$

Με βάση τώρα την διατήρηση της ενέργειας, η παραπάνω ενέργεια θα ισούται με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των δύο στερεών, συν την μηχανική ενέργεια που μετετράπη σε θερμική, εξαιτίας της τριβής, δηλαδή έχουμε:

$$W_F = K_\rho + K_\delta + Q_\theta \Rightarrow$$

$$Q_\theta = W_F - K_\rho - K_\delta = W_F - \frac{1}{2} I_o \omega_{\rho,1}^2 - K_\delta \Rightarrow$$

$$Q_\theta = 125J - \frac{1}{2} 8 \cdot 5^2 J - 20J = 5J$$

dmargaris@gmail.com