# Μια ελαστική κρούση και μια «κρούση» διαρκείας

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δυο σφαίρες Α και Β, της ίδιας (μικρής) ακτίνας R με μάζες m1=2kg και m2=6kg αντίστοιχα, δεμένες στο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=50Ν/m και φυσικού μήκους l0=1m. Μια τρίτη σφαίρα Σ, ίδιας ακτίνας R και μάζας m=1kg, κινείται οριζόντια κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου με ταχύτητα u0=6m/s (χωρίς να περιστρέφεται) και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με την σφαίρα Α.

i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα την οποία αποκτά η Α σφαίρα μετά την κρούση, η οποία θεωρείται ακαριαία (αμελητέας διάρκειας, οπότε η σφαίρα «δεν προλαβαίνει» να μεταβάλλει το μήκος του ελατηρίου).

ii) Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των σφαιρών Α και Β, για την κίνησή τους μετά την παραπάνω κρούση.

iii) Ποια η μέγιστη στιγμιαία ταχύτητα την οποία πρόκειται να αποκτήσει η Β σφαίρα;

iv) Κάποια στιγμή t1 βλέπουμε την σφαίρα Α να έχει ταχύτητα μέτρου υ1=1m/s με κατεύθυνση προς τα αριστερά. Για τη στιγμή αυτή να υπολογιστούν:

α) Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

β) ο ρυθμός μεταβολής της ορμής και ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της Α σφαίρας.

***Απάντηση:***

* 1. Από τις εξισώσεις της κεντρικής ελαστικής κρούσης μεταξύ των σφαιρών Σ και Α παίρνουμε:

 

Όπου uΑ η ταχύτητα της σφαίρας Α, αμέσως μετά την κρούση.

* 1. Με την παραπάνω ταχύτητα η Α σφαίρα αρχίζει να συμπιέζει το ελατήριο, το οποίο με την σειρά του ασκεί δυνάμεις στις δύο σφαίρες, όπως στο σχήμα. Το αποτέλεσμα είναι η σφαίρα Α να επιβραδύνεται, ενώ η Β επιταχύνεται. Για όσο διάστημα η Α έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από την Β, την πλησιάζει και το μήκος του ελατηρίου μειώνεται. Αντίθετα όταν η Β αποκτήσει μεγαλύτερη ταχύτητα από την Α η απόσταση μεταξύ τους θα αυξηθεί και το ελατήριο θα αυξάνει το μήκος του. Έτσι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των δύο σφαιρών θα είναι τη στιγμή που οι δυο σφαίρες έχουν ίσες ταχύτητες. Αν υκ η κοινή ταχύτητα των δύο σφαιρών τη στιγμή αυτή, από διατήρηση της ορμής μεταξύ της στιγμής αμέσως μετά την κρούση και τη στιγμή της ελάχιστης απόστασης μεταξύ των σφαιρών, παίρνουμε:

 

Στη διάρκεια της παραπάνω κίνησης η μηχανική ενέργεια διατηρείται (στα σώματα ασκούνται οι δυνάμεις από το ελατήριο, δυνάμεις συντηρητικές), οπότε παίρνουμε:

 

Οπότε τη στιγμή της κοινής ταχύτητας, η απόσταση μεταξύ των δύο σφαιρών, ίση με το μήκος του ελατηρίου (θεωρούμε αμελητέα την ακτίνα R) είναι ίση:

 

* 1. Η σφαίρα Β επιταχύνεται για όσο χρόνο το ελατήριο είναι συσπειρωμένο. Αλλά αυτό δεν θα συμβαίνει για πάντα!!! Η Α σφαίρα συμπιέζει το ελατήριο μέχρι την στιγμή της κοινής ταχύτητας που βρήκαμε παραπάνω, αλλά στη συνέχεια η Β σφαίρα αρχίζει να απομακρύνεται και το ελατήριο αρχίζει να αποσυμπιέζεται μέχρι να αποκτήσει το φυσικό μήκος του, αφού στη συνέχεια επιμηκύνεται με αποτέλεσμα να επιβραδύνεται η Β σφαίρα. Έτσι η σφαίρα αποκτά την μέγιστη ταχύτητά της, τη στιγμή που το ελατήριο αποκτά το φυσικό μήκος του. Αν u1 και u2 οι ταχύτητες των δύο σφαιρών τη στιγμή αυτή t, θα έχουμε για το χρονικό διάστημα αμέσως μετά την κρούση, μέχρι τη στιγμή t΄:

Α.Δ.Ο.:  (1)

A.Δ.Μ.Ε.: 

Το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) αποτελούν τις γνωστές εξισώσεις της ελαστικής κρούσης, οπότε παίρνουμε τις «λύσεις» για τις ταχύτητες:

  και



* 1. Σε όλα τα προηγούμενα ερωτήματα, πήραμε (σιωπηλά) την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική, συνεπώς την στιγμή t1 η σφαίρα Α έχει ταχύτητα υ1=-1m/s. Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ο από τη στιγμή της κρούσης μέχρι τη στιγμή t1 παίρνουμε:



α) Εφαρμόζοντας τώρα ξανά την ΑΔΜΕ, για το παραπάνω διάστημα, βρίσκουμε:



β) Τη στιγμή t1 το ελατήριο έχει μια παραμόρφωση:



Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

* Το ελατήριο να έχει συσπειρωθεί κατά 0,5m. Τότε η κατάσταση είναι αυτή του διπλανού σχήματος, όπου αποφύγαμε να σχεδιάσουμε βάρος και κάθετη αντίδραση του επιπέδου, δυνάμεις που δεν επηρεάζουν την μελέτη μας. Τότε για τους ζητούμενους ρυθμούς έχουμε:

 

Όπου η αρνητική τιμή σημαίνει ότι το αντίστοιχο διάνυσμα έχει φορά προς τα αριστερά (αρνητική κατεύθυνση).

 

Πράγμα που σημαίνει ότι η κινητική ενέργεια αυξάνεται με ρυθμό 25J/s.

* Το ελατήριο έχει επιμήκυνση 0,5m, τότε με βάση το σχήμα, παίρνουμε:



Δηλαδή έχουμε ρυθμό μεταβολής της ορμής με κατεύθυνση προς τα δεξιά, και:



Δηλαδή η κινητική ενέργεια της σφαίρας μειώνεται κατά 25J/s.

***Σχόλια.***

1. Η διατήρηση της ορμής όπως εφαρμόστηκε στο ii) ερώτημα παραπέμπει στην πλαστική κρούση και στην κοινή ταχύτητα του «συσσωματώματος». Έτσι η μηχανική ενέργεια που στην πλαστική κρούση μετατρέπεται σε θερμική, εδώ αποθηκεύεται στο ελατήριο, με τη μορφή της δυναμικής ενέργειας.
2. Αν η θέση μέγιστης συσπείρωσης του ελατηρίου παραπέμπει στην πλαστική κρούση, η θέση φυσικού μήκους, παραπέμπει στην ελαστική κρούση, στο ερώτημα iii).
3. Στο iii) ερώτημα βρήκαμε ότι η σφαίρα Α έχει ταχύτητα u1=-2m/s, τη στιγμή που το ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του. Αλλά τότε στην ταχύτητα αυτή φτάνει αφού περάσει από την ταχύτητα υ1=-1m/s, σε δύο διαφορετικές περιπτώσεις:
* Όταν επιταχύνεται προς τα αριστερά από μηδενική ταχύτητα, άρα η δύναμη του ελατηρίου έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά, ελατήριο συσπειρωμένο και
* Όταν επιβραδύνεται, κινούμενο προς τα αριστερά και η ταχύτητά του μειώνεται κατά μέτρο, οπότε η δύναμη του ελατηρίου έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά, ελατήριο σε επιμήκυνση!

Αυτές τις δύο εκδοχές αντιμετωπίσαμε στο ερώτημα iv) β).

Τα παραπάνω εμφανίζονται ίσως καλύτερα, αν σχεδιάσουμε ένα ποιοτικό διάγραμμα της ταχύτητας της Α σφαίρας καθώς κινείται προς τα αριστερά. Βλέπουμε δύο στιγμές με ταχύτητα υ1, στην πρώτη με αρνητική επιτάχυνση στη δεύτερη με θετική…

***dmargaris@gmail.com***