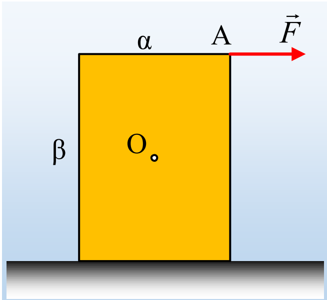
Η ισορροπία και η κίνηση μιας πλάκας



Μια ορθογώνια πλάκα, με πλευρές α=1,2m και β=1,6m και μάζας 15kg, ηρεμεί όρθια σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0,8$. Σε μια στιγμή ασκούμε στην πάνω δεξιά κορυφή της Α, μια οριζόντια δύναμη F, όπως στο σχήμα.

i) Ποια είναι η μέγιστη τιμή του μέτρου της ασκούμενης δύναμης F, για την οποία η πλάκα ισορροπεί;

ii) Αν το μέτρο της δύναμης γίνει ίσο με F_1=70N να υπολογιστούν:

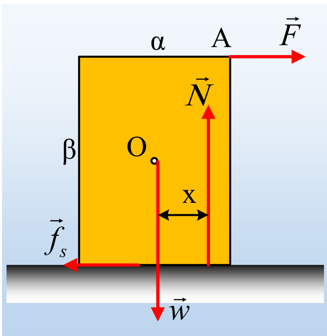
α) η αρχική επιτάχυνση του κέντρου μάζας Ο της πλάκας.

β) Οι αρχικές τιμές της κάθετης αντίδρασης του επιπέδου και της ασκούμενης τριβής στην πλάκα.

iii) Αν για τους συντελεστές τριβής μεταξύ πλάκας και επιπέδου είχαμε $\mu=\mu_s=0,3$, να βρεθεί η αρχική γωνιακή επιτάχυνση της πλάκας και η επιτάχυνση της κορυφής Β, με την επίδραση της δύναμης F_1.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της πλάκας ως προς κάθετο στο επίπεδό της άξονα, ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας Ο, $I= M(\alpha^2+\beta^2)/12$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:



i) Αν υποθέσουμε ότι ασκούμε μια μικρή δύναμη F, της οποίας αυξάνουμε σιγά-σιγά το μέτρο. Σε μια στιγμή, οι δυνάμεις που ασκούνται στην πλάκα, θα είναι όπως στο διπλανό σχήμα. Για να ισορροπεί η πλάκα, θα πρέπει:

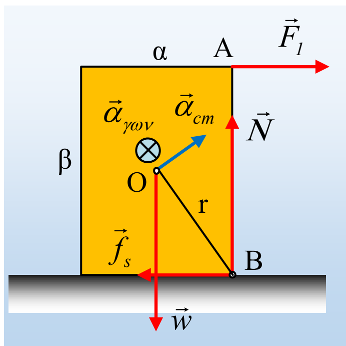
A) ΣF=0, οπότε $F-f_s=0$, αλλά τότε η δύναμη δεν πρέπει να ξεπεράσει το μέτρο της οριακής τριβής:

$$f_{op}=\mu_s N=\mu_s mg=0,8\cdot 15\cdot 10N=120N.$$

B) Θα πρέπει να μην ανατραπεί, άρα ο μοχλοβραχίονας x της κάθετης αντίδρασης να είναι x≤ ½ α ή x≤0,6m. Έτσι για x=0,6m παίρνουμε ότι:

$$\Sigma\tau_o=0 \rightarrow N\cdot x-F\cdot ½\, \beta - f_s\cdot ½\, \beta=0 \;\; και \;\; F=f_s, \text{ οπότε:}$$

$$F=\frac{N\cdot x}{\beta}=\frac{x}{\beta}mg=\frac{0,6}{1,6}150N=56,25N$$



Συμπέρασμα: Για να έχουμε ισορροπία, θα πρέπει η δύναμη F να μην ξεπεράσει την τιμή 56,25N, αφού τότε πρόκειται να ανατραπεί η πλάκα, πολύ πριν ολισθήσει.

ii) Αν η δύναμη πάρει τιμή F_1=70N, με βάση τα παραπάνω, η πλάκα θα αρχίσει να ανατρέπεται (να περιστρέφεται), χωρίς να ολισθαίνει, αφού $F_1<f_{op}$. Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε την κίνηση σύνθετη, μια μεταφορική και μια περιστροφή γύρω από οριζόντιο άξονα που να περνά από το

κέντρο μάζας Ο. Όμως για λόγους ευκολίας, θα επιλέξουμε να θεωρήσουμε την κίνηση στροφική γύρω από οριζόντιο άξονα, κάθετο στην πλάκα, ο οποίος περνά από την κορυφή Β της πλάκας.

A) Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα για την στροφική κίνηση της πλάκας, θα πάρουμε (οι δεξιόστροφες ροπές θεωρούνται θετικές):

$$\Sigma\tau_B = I_B \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \quad F_1 \cdot \beta - mg \cdot \frac{a}{2} = I_B \cdot a_{\gamma\omega\nu} \quad (1)$$

Οπότε το κέντρο Ο, διαγράφει κύκλο ακτίνας r, όπου:

$$r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2} = \sqrt{0,6^2 + 0,8^2}\, m = 1m$$

Ενώ από Steiner παίρνουμε:

$$I_B = I_{cm} + mr^2 = \frac{1}{12} m\left(a^2 + \beta^2\right) + mr^2 \rightarrow$$

$$I_B = \left(\frac{1}{12} 15\left(1,2^2 + 1,6^2\right) + 15 \cdot 1^2\right) kgm^2 = 20kgm^2.$$

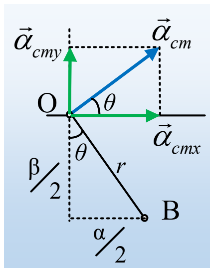
Με αντικατάσταση στην (1) θα έχουμε:

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{F_1 \cdot \beta - mg \cdot \frac{a}{2}}{I_B} = \frac{70 \cdot 1,6 - 15 \cdot 10 \cdot 0,6}{20} rad/s^2 = 1,1 rad/s^2.$$

Οπότε το κέντρο μάζας Ο της πλάκας έχει επιτάχυνση, κάθετη στην ακτίνα r, όπως στο παραπάνω σχήμα, με μέτρο:

$$\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot r = 1,1 m/s^2.$$

B) Αναλύουμε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας σε δύο συνιστώσες σε οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση, όπου:



$$\alpha_{cmx} = a_{cm} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = a_{cm} \cdot \frac{\beta/2}{r} = 1,1 \cdot \frac{0,8}{1} m/s^2 = 0,88 m/s^2.$$

$$\alpha_{cmy} = a_{cm} \cdot \eta\mu\theta = a_{cm} \cdot \frac{\alpha/2}{r} = 1,1 \cdot \frac{0,6}{1} m/s^2 = 0,66 m/s^2.$$

Οπότε εφαρμόζοντας τον 2ο νόμο του Νεύτωνα για την κίνηση του κέντρου μάζας, παίρνουμε:

$$\Sigma F_x = m \cdot \alpha_{cmx} \rightarrow F_1 - f_s = m \cdot \alpha_{cmx} \rightarrow f_s = F_1 - m \cdot \alpha_{cmx} \rightarrow$$

$$f_s = 70N - 15 \cdot 0,88N = 56,8N$$

$$\Sigma F_y = m \cdot \alpha_{cmy} \rightarrow N - mg = m \cdot \alpha_{cmy} \rightarrow N = mg + m \cdot \alpha_{cmy} \rightarrow$$

$$N = 15 \cdot 10N + 15 \cdot 0,66N = 159,9N$$

iii) Αν μ_s=0,3, τότε θα μπορούσε να ασκηθεί οριακή στατική τριβή $f_{1o\rho} = \mu_s \cdot N = 0,3 \cdot 150N = 45N$, με την υπόθεση ότι η N=w=150N. Όμως η ασκούμενη δύναμη F_1=70N έχει πολύ μεγαλύτερο μέτρο, με αποτέλεσμα η πλάκα να ολισθήσει, άσχετα αν το μέτρο της N είναι τελικά λίγο μεγαλύτερο από 150N και η τριβή ολίσθησης λίγο μεγαλύτερη από τα 45N.

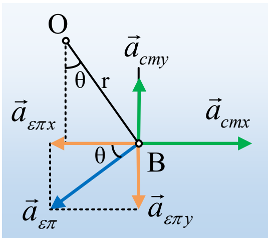
Αλλά τότε η κίνηση της πλάκας την θεωρούμε σύνθετη, μια μεταφορική και μια περιστροφή γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας Ο. Από τον 2^{ο} νόμο του Νεύτωνα, παίρνουμε:

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_x = ma_{cmx} \rightarrow F_1 - f = ma_{cmx}$ (2)

$\Sigma F_y = ma_{cmy} \rightarrow N_1 - w = ma_{cmy}$ (3)

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau_o = I_{cm} \cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F_1 \cdot \frac{\beta}{2} + f \cdot \frac{\beta}{2} - N_1 \cdot \frac{a}{2} = I_{cm} \cdot a_{\gamma\omega\nu}$ (4)

Όπου $I_{cm} = \frac{1}{12} m\left(a^2 + \beta^2\right) = \frac{1}{12} 15\left(1,2^2 + 1,6^2\right) kgm^2 = 5kgm^2$.



Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι επιταχύνσεις της κορυφής Β, όπου $\alpha_{\varepsilon\pi}$ η επιτρόχια επιτάχυνσή του εξαιτίας της κυκλικής κίνησης, γύρω από το Ο.

Αλλά αν υπάρχει επιτάχυνση α_{cmy} με φορά προς τα πάνω, τότε υπάρχει και κάθετη αντίδραση του επιπέδου ή με άλλα λόγια το σημείο Β δεν χάνει την επαφή του με το επίπεδο, οπότε η κατακόρυφή επιτάχυνσή του είναι μηδενική. Θα ισχύει δηλαδή:

$$\alpha_{cmy} = a_{\varepsilon\pi y} = a_{\varepsilon\pi} \cdot \eta\mu\theta = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot r \cdot \frac{a/2}{r} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha_{cmy}}{0,6}$$

Και η (4) με την βοήθεια της (3) δίνει:

$$F_1 \cdot 0,8 + \mu N_1 \cdot 0,8 - N_1 \cdot 0,6 = I_{cm} \cdot \frac{\alpha_{cmy}}{0,6} \rightarrow$$

$$F_1 \cdot 0,8 - 0,36(mg - ma_{cmy}) = 5 \cdot \frac{\alpha_{cmy}}{0,6} \rightarrow$$

$$a_{cmy} = 0,145m/s^2 \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha_{cmy}}{0,6} = \frac{0,145}{0,6} rad/s^2 = 0,24 rad/s^2$$

Κατά συνέπεια, η κορυφή Β έχει μόνο οριζόντια επιτάχυνση α_{cmx}, για την οποία:

Από την (3) θα βρούμε: $N_1 - w = ma_{cmy} \rightarrow N_1 = 150N + 15 \cdot 0,145N \approx 152N$ και από την (2):

$$F_1 - f = ma_{cmx} \rightarrow a_{cmx} = \frac{F_1 - \mu N_1}{m} \rightarrow$$

$$a_{cmx} = \frac{70N - 0,3 \cdot 152N}{15kg} = 1,6m/s^2.$$

Αλλά τότε για την επιτάχυνση του σημείου Β της πλάκας, έχουμε:

$$\alpha_B = \alpha_{cmx} - a_{\varepsilon\pi x} = \alpha_{cmx} - a_{\gamma\omega\nu} r \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \rightarrow$$

$$\alpha_B = 1{,}6 m/s^2 - 0{,}24 \cdot 1 \cdot \frac{0{,}8}{1} m/s^2 \approx 1{,}4 m/s^2 .$$

Σχόλια:

1) Αξίζει να προσέξουμε το μέτρο της κάθετης αντίδρασης του επιπέδου. Είναι ίση κατά μέτρο με το βάρος, μόνο αν η πλάκα ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση. Εδώ και στις δύο περιπτώσεις περιστροφής που εξετάσαμε το κέντρο μάζας, θα κινηθεί προς τα πάνω, συνεπώς πρέπει να υπάρξει κατακόρυφη επιτάχυνση με φορά προς τα πάνω και $N > w$.

2) Η περίπτωση ii) είναι αντίστοιχη της κύλισης χωρίς ολίσθηση. Θα μπορούσε να μελετηθεί σαν σύνθετη κίνηση με μηδενική ταχύτητα του σημείου επαφής Β, με το επίπεδο.

dmargaris@gmail.com