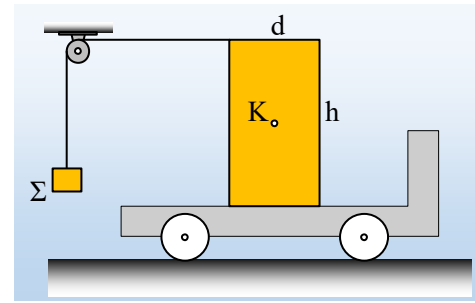


## Η ολίσθηση και η ανατροπή του ορθογώνιου

Το κατακόρυφο ομογενές ορθογώνιο κιβώτιο του σχήματος, έχει μάζα  $M=40\text{kg}$  και ηρεμεί στην καρότσα ενός ακίνητου φορτηγού, ενώ μέσω νήματος, το οποίο περνά από μια αβαρή τροχαλία, ισορροπεί ένα σώμα  $\Sigma$ , μάζας  $m=4\text{kg}$ , όπως στο σχήμα, όπου το νήμα μεταξύ κιβωτίου και τροχαλίας είναι οριζόντιο. Δίνονται οι συντελεστές τριβής μεταξύ του κιβωτίου και της καρότσας του φορτηγού  $\mu=\mu_s=0,2$ , ενώ το κιβώτιο έχει διαστάσεις  $h=1\text{m}$  και  $d=0,4\text{m}$  και  $g=10\text{m/s}^2$ . Σε μια στιγμή το φορτηγό αρχίζει να επιταχύνεται με αυξανόμενη επιτάχυνση, ξεκινώντας από μηδενική τιμή.



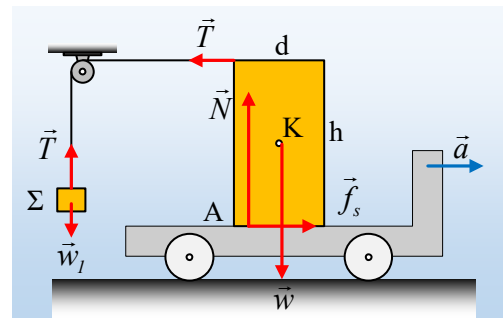
- i) Τι πρόκειται να συμβεί πρώτα. Το κιβώτιο θα ολισθήσει ή θα ανατραπεί;
- ii) Ποιος ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ κιβωτίου και καρότσας, ώστε να συμβεί πρώτα το αντίθετο ενδεχόμενο, σε σχέση με το προηγούμενο ερώτημα.

### Απάντηση:

- i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σημειωθεί οι δυνάμεις σε κιβώτιο και σώμα  $\Sigma$ , κάποια στιγμή που το φορτηγό κινείται με επιτάχυνση  $a$ , με  $f_s$  την στατική τριβή στο κιβώτιο και  $T$  την τάση του νήματος. Εφαρμόζοντας για κάθε σώμα το 2<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$\text{Κιβώτιο: } \Sigma F_x = Ma \rightarrow f_s - T = Ma \quad (1)$$

$$\text{Σώμα } \Sigma: \quad \Sigma F_y = ma \rightarrow T - mg = ma \quad (2)$$



Αφού τα σώματα έχουν ίσες κατά μέτρο επιταχύνσεις (όσο θα μετακινηθεί προς τα δεξιά το κιβώτιο, τόσο θα ανέβει το σώμα  $\Sigma$ ). Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$f_s - mg = Ma + ma \rightarrow f_s = mg + (M + m)a \quad (3)$$

Από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι καθώς αυξάνεται η επιτάχυνση του φορτηγού, αυξάνεται και η εμφανιζόμενη στατική τριβή μεταξύ σώματος και καρότσας. Η αύξηση αυτή θα οδηγήσει σε τιμή οριακής τριβής, οπότε θα έχουμε και την μεγαλύτερη δυνατή επιτάχυνση, χωρίς να ολισθήσει το κιβώτιο.

Οπότε από την (3) βρίσκουμε την μέγιστη επιτάχυνση στην οποία θα αρχίσει η ολίσθηση:

$$a = \frac{f - mg}{M + m} = \frac{\mu Mg - mg}{M + m} = \frac{0,2 \cdot 40 \cdot 10 - 4 \cdot 10}{40 + 4} \text{ m/s}^2 = \frac{10}{11} \text{ m/s}^2.$$

Μήπως με αυτήν την τιμή της επιτάχυνσης ή λίγο νωρίτερα το κιβώτιο ανατρέπεται; Η ανατροπή πρόκειται να συμβεί, όταν η κάθετη αντίδραση του επιπέδου ασκείται στην κάτω αριστερή γωνία του κιβωτίου A, πράγμα που σημαίνει ότι η βάση έχει χάσει την επαφή με την καρότσα, εκτός του σημείου A. Ας βρούμε

λοιπόν για την παραπάνω επιτάχυνση τον μοχλοβραχίονα της Ν, έστω  $x$ , από το κέντρο Κ του ορθογωνίου, θεωρώντας ότι το στερεό μας δεν περιστρέφεται:

$$\Sigma \tau_K = 0 \rightarrow f \cdot \frac{h}{2} + T \cdot \frac{h}{2} - N \cdot x = 0 \xrightarrow{(2)}$$

$$x = \frac{f + mg + ma}{2Mg} h = \frac{80 + 4 \cdot 10 + 4 \cdot 10/11}{2 \cdot 40 \cdot 10} m \approx 0,15m$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι μέχρι και την στιγμή που έχουμε ολίσθηση η Ν δεν έχει «φτάσει» στην άκρη της βάσης και δεν πρόκειται να υπάρξει κάποια ανατροπή. Έτσι το ορθογώνιο θα ολισθήσει χωρίς να ανατραπεί, αφού και να αυξηθεί παραπέρα η επιτάχυνση του φορτηγού, δεν πρόκειται να αυξηθεί πλέον η επιτάχυνση του ορθογωνίου, η οποία θα παραμείνει ίση με  $10/11 \text{ m/s}^2$ , αφού δεν πρόκειται να αυξηθεί παραπέρα το μέτρο της ασκούμενης τριβής.

- ii) Έστω τώρα ότι έχουμε μεγαλύτερο συντελεστή οριακής στατικής τριβής, με αποτέλεσμα το κιβώτιο να ανατραπεί, πριν ολισθήσει. Αυτό, σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση, θα συμβεί, όταν ο μοχλοβραχίονας της Ν, ως προς το Κ γίνει  $x = \frac{1}{2} d = 0,2m$ . Αν βρισκόμαστε οριακά πριν την ανατροπή, το κιβώτιο δεν στρέφεται (ακόμα) και  $\Sigma \tau_K = 0$  ή

$$f_{s_1} \cdot \frac{h}{2} + T_1 \cdot \frac{h}{2} - N \cdot \frac{d}{2} = 0 \rightarrow$$

$$(f_{s_1} + T_1) \cdot \frac{h}{2} = N \cdot \frac{d}{2} \rightarrow f_{s_1} + T_1 = 160N \quad (4)$$

Ενώ από τον 2<sup>ο</sup> νόμο θα έχουμε ξανά:

$$\text{Κιβώτιο: } \Sigma F_x = Ma_1 \rightarrow f_{s_1} - T_1 = Ma_1 \quad (1\alpha)$$

$$\text{Σώμα } \Sigma: \quad \Sigma F_y = ma_1 \rightarrow T_1 - mg = ma_1 \quad (2\alpha)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (2<sup>α</sup>)x2 και προσθέτοντας την (1<sup>α</sup>) κατά μέλη παίρνουμε:

$$f_{s_1} + T_1 - 2mg - (M + 2m)a_1 \rightarrow$$

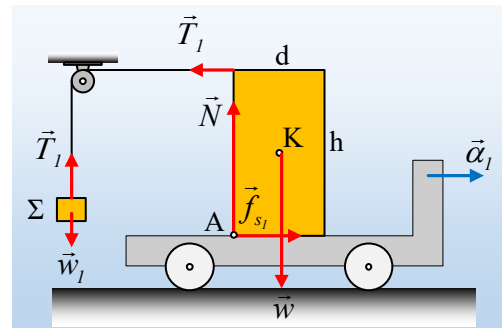
$$a_1 = \frac{f_{s_1} + T_1 - 2mg}{M + m} = \frac{160N - 2 \cdot 4 \cdot 10}{40 + 2 \cdot 4} \text{ m/s}^2 = \frac{5}{3} \text{ m/s}^2.$$

Οπότε για το μέτρο της στατικής τριβής θα έχουμε:

$$f_{s_1} + T_1 = 160N \rightarrow f_{s_1} + mg + ma = 160N \rightarrow$$

$$f_{s_1} = \frac{340}{3}N$$

Η παραπάνω τριβή είναι στατική, συνεπώς μικρότερη ή ίση από την οριακή τριβή, οπότε:



$$f_{s_1} \leq f_{op_1} \rightarrow f_{s_1} \leq \mu_{1s} N \rightarrow$$

$$\mu_{1s} \geq \frac{f_{s_1}}{N} \rightarrow \mu_{1s} \geq \frac{340/3}{400} \rightarrow \mu_{1s} \geq \frac{340/3}{400} \rightarrow \mu_{1s} \geq 17/60$$

Συνεπώς ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής, για να έχουμε ανατροπή είναι:

$$\mu_{s.min} = \frac{17}{60} \approx 0,28$$

### Σχόλια:

1) Οι παραπάνω τιμές επιτάχυνσης και συντελεστών τριβής προέκυψαν με δεδομένες τις μάζες κιβωτίου και σώματος Σ. Αν αυτές αλλάξουν, θα προκύψουν διαφορετικά αποτελέσματα.

Για παράδειγμα αν  $m=0$  (δεν κρεμάσουμε σώμα Σ), τότε η επιτάχυνση του φορτηγού που θα προκαλέσει ολίσθηση, καθορίζεται μόνο από την τιμή της στατικής τριβής και η απάντηση στο i) ερώτημα θα έδινε:

$$\Sigma F_x = Ma \rightarrow f_s = Ma \rightarrow a = \mu_s g = 2m / s^2$$

Πολύ μεγαλύτερη από αυτήν που υπολογίσαμε παραπάνω.

- 2) Η τιμή της στατικής τριβής, μεταξύ κιβωτίου και καρότσας, καθορίζει το αν θα έχουμε ολίσθηση ή ανατροπή. Έτσι για  $\mu_s < 0,28$  θα έχουμε ολίσθηση και για  $\mu_s \geq 0,28$  θα έχουμε ανατροπή.
- 3) Αναλόγως τώρα την τιμή του  $\mu_s$  προκύπτει και η μέγιστη επιτάχυνση του φορτηγού, για να μεταφέρει με ασφάλεια το κιβώτιο. Έτσι για  $\mu_s=0,2$  αυτή βρέθηκε ίση με  $10/11m/s^2$ , ενώ αυξάνεται αυξανόμενου του  $\mu_s$ , φτάνοντας στην τιμή  $5/3m/s^2$  για την ανατροπή. Πράγμα που σημαίνει ότι αν  $\mu_s=0,279\dots$  θα προκύψει ολίσθηση σε επιτάχυνση λίγο μικρότερη του  $5/3$ !
- 4) Θα περίμενε κάποιος να επιτρεπόταν πολύ μεγαλύτερες επιταχύνσεις αν είχαμε μεγαλύτερο συντελεστή οριακής στατικής τριβής, πράγμα που δεν ισχύει. Η εξίσωση (4) βάζει έναν ισχυρό περιορισμό στις τιμές τριβής και τάσης νήματος. Έτσι αν κάποιος θέσει  $\mu_s=0,8$  δεν σημαίνει ότι μπορεί να ασκηθεί στο κιβώτιο δύναμη τριβής μέτρου  $320N$ ! Η τριβή θα ήταν στατική και μόλις αποκτούσε μέτρο  $340/3N=113,3N$  θα είχαμε ανατροπή. Απλά οι μεγάλοι συντελεστές τριβής οδηγούν σε ανατροπή και οι μικροί σε ολίσθηση.

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)