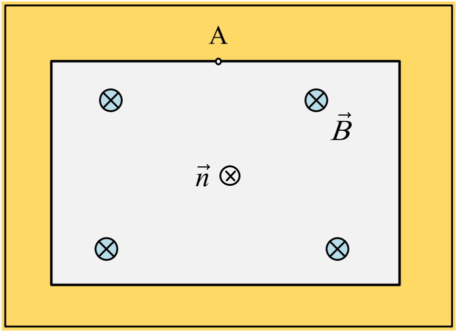
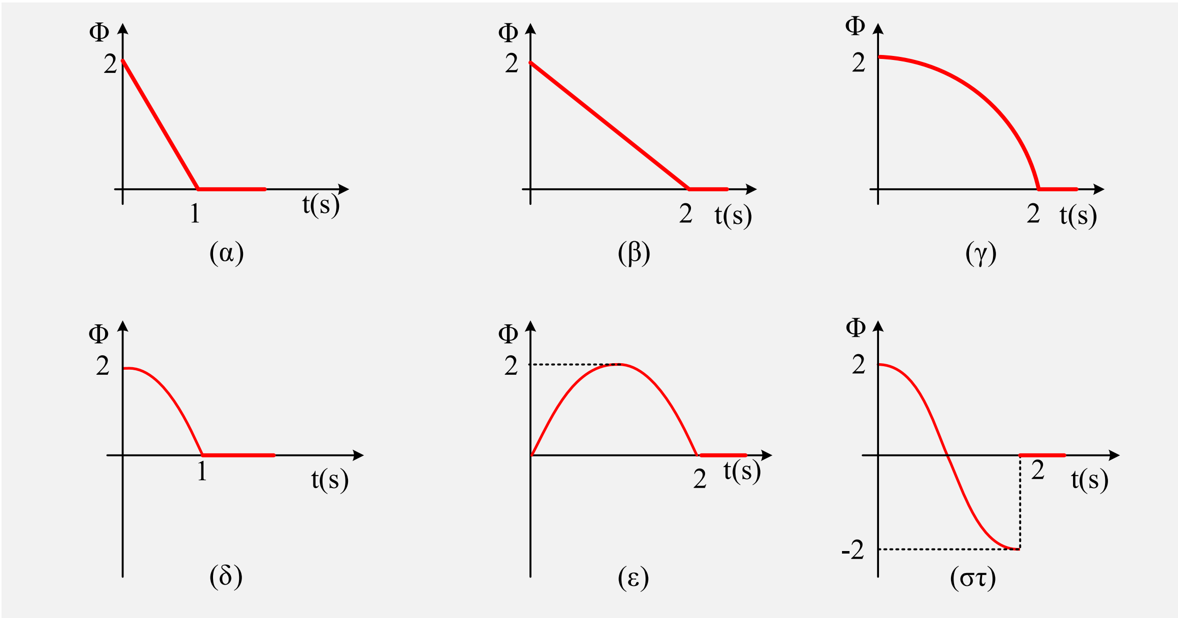
Περί του νόμου του Neumann.

Ένα μεταλλικό ορθογώνιο πλαίσιο, με αντίσταση R=1Ω βρίσκεται μέσα σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετα στις δυναμικές γραμμές, όπως στο σχήμα. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της μαγνητικής ροής που περνά από το πλαίσιο σε συνάρτηση με το χρόνο, θεωρώντας t=0 τη στιγμή που αρχίζει να μεταβάλλεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου.





i) Να υπολογιστεί το συνολικό φορτίο που διέρχεται από μια διατομή στη θέση Α του πλαισίου στις περιπτώσεις των σχημάτων (α) και (β).

ii) Ποια η αντίστοιχη απάντηση για την περίπτωση του (γ) σχήματος, αν η συνάρτηση της ροής είναι:

$$\Phi = 2 - \tfrac{1}{2}t^2 \quad \text{(μονάδες στο S.I.)}$$

Καθώς και την περίπτωση του σχήματος (δ) όπου Φ=2·συνωt (S.I.)

iii) Να υπολογιστεί επίσης το ολικό φορτίο στις περιπτώσεις των σχημάτων, (ε) και (στ) όπου οι συναρτήσεις της ροής είναι αρμονικές.

Απάντηση:

i) Στις περιπτώσεις (α) και (β) η κλίση της ευθείας είναι σταθερή, οπότε στο πλαίσιο αναπτύσσονται και σταθερές ΗΕΔ από επαγωγή. Έτσι στην πρώτη περίπτωση έχουμε:

$$E_\alpha = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{0-2}{1-0}V = 2V$$

$$i_a = \frac{E_a}{R} = \frac{2V}{1\Omega} = 2A$$

$$q_a = i_a t_\alpha = 2 \cdot 1C = 2C$$

Στην (β) περίπτωση:

$$E_\beta = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{0-2}{2-0}V = 1V$$

$$i_\beta = \frac{E_\beta}{R} = \frac{1V}{1\Omega} = 1A$$

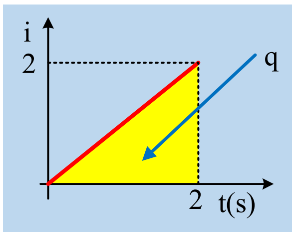
$$q_\beta = i_\beta t_\beta = 1 \cdot 2C = 2C$$

Βλέπουμε δηλαδή να επιβεβαιώνεται στην περίπτωση του σταθερού ρυθμού μεταβολής της ροής, ο νόμος του Neumann και το συνολικό φορτίο που διέρχεται από μια διατομή του αγωγού, είναι ανεξάρτητο του χρόνου μεταβολής της μαγνητικής ροής.

ii) Στην περίπτωση που η ροή δεν μεταβάλλεται γραμμικά, όπως στο σχήμα (γ) η ΗΕΔ δεν είναι σταθερή, αφού από το νόμο της επαγωγής παίρνουμε:

$$E_\gamma = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\left(2-\frac{1}{2}t^2\right)}{dt} = -\left(2-\frac{1}{2}t^2\right)' = t \rightarrow$$

$$i_\gamma = \frac{E_\gamma}{R} = \frac{t}{1} = t \quad (A)$$



$$q_\gamma = \int_0^2 i dt = \int_0^2 t dt = \left|\frac{t^2}{2}\right|_0^2 = \frac{2^2}{2}C = 2C$$

Εναλλακτικά από το διάγραμμα i-t του σχήματος, παίρνουμε ότι το ολικό φορτίο είναι αριθμητικά ίσο με το εμβαδόν του κίτρινου τριγώνου:

$$q_\gamma = \frac{1}{2}it = \frac{1}{2}2 \cdot 2C = 2C$$

Για την περίπτωση του σχήματος (δ) η συνάρτηση της ροής είναι συνημιτονοειδής με περίοδο Τ, όπου Τ/4=1s ή Τ=4s. Έτσι η συνάρτηση της ροής είναι:

$$\Phi_\delta = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}t\right) \qquad (S.I.)$$

Οπότε δουλεύοντας όπως παραπάνω, παίρνουμε:

$$E_\delta = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\left(2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)}{dt} = -\left(2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)' = \pi \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

$$i_\delta = \frac{E_\delta}{R} = \pi \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right) \quad (A)$$

$$q_\delta = \int_0^1 idt = \int_0^1 \pi \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt = -2\left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right|_0^1 = -2\left(0-1\right)C = 2C$$

Είναι φανερό ότι το ολικό φορτίο που διέρχεται από μια διατομή του αγωγού, είναι επίσης ανεξάρτητο της συνάρτησης Φ=Φ(t) (αλλά και του χρόνου…) με αποτέλεσμα και στην περίπτωση της συνάρτησης $2^{ου}$ βαθμού και στην περίπτωση της αρμονικής μεταβολής της ροής, το φορτίο να είναι επίσης 2C.

iii) Με την ίδια λογική στην περίπτωση του σχήματος (ε), όπου T/2=2s ή T=4s, η εξίσωση της μαγνητικής ροής γίνεται :

$$\Phi_\varepsilon = 2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right) \quad (S.I.)$$

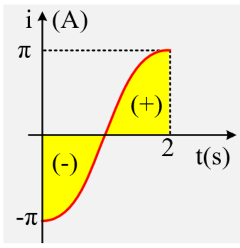
Έτσι δουλεύοντας όπως παραπάνω, παίρνουμε:

$$E_\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\left(2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)}{dt} = -\left(2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)' = -\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

$$i_\varepsilon = \frac{E_\delta}{R} = -\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}t\right) \quad (A)$$

$$q_\varepsilon = \int_0^2 idt = -\int_0^2 \pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt = -2\left|\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right|_0^2 = -2\left(0-0\right)C = 0$$

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της έντασης του ρεύματος όπου τα κίτρινα χωρία, είναι αριθμητικά ίσα με τα φορτία που διέρχονται από μια διατομή. Τα δύο φορτία είναι αντίθετα και το συνολικό φορτίο προκύπτει μηδενικό.



Τέλος στο σχήμα (στ) T/2=2s ή T=4s και η ροή παίρνει τη μορφή:

$$\Phi_{\sigma\tau} = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}t\right) \quad (S.I.)$$

Οπότε όμοια θα έχουμε:

$$E_{\sigma\tau} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\left(2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)}{dt} = -\left(2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)' = \pi \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right) \quad (S.I.)$$

$$i_{\sigma\tau} = \frac{E_\varepsilon}{R} = \pi \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right) \quad (A)$$

$$q_{\sigma\tau} = \int_0^2 idt = \int_0^2 \pi \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt = -2\left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right|_0^2 = -2\left(-1-1\right)C = 4C$$

Εύκολα διαπιστώνει κάποιος ότι έχουμε το διπλάσιο φορτίο στην περίπτωση αυτή, αφού έχουμε και διπλάσια μεταβολή της ροής!

Αξίζει να τονισθεί ότι «το φορτίο που διέρχεται από μια διατομή του αγωγού» συνδέεται με το ηλεκτρικό ρεύμα και υπολογίζεται, σε κάθε περίπτωση από το ολοκλήρωμα $q = \int idt$, χωρίς να μπαίνουν στη συζήτηση, άλλα ρήματα, όπως «αναπτύχθηκε», «μετατοπίσθηκε», «μετακινήθηκε»… που κατά περίπτωση θα βρίσκουμε και διαφορετικά αποτελέσματα.

dmargaris@gmail.com