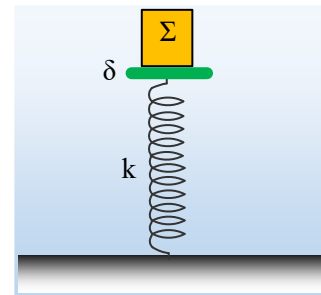


Αφήνουμε ένα σώμα, πάνω στο δίσκο

Ένας δίσκος μάζας $m=1\text{kg}$ ταλαντώνεται στο πάνω άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς $k=100\text{N/m}$, το άλλο άκρο του οποίου στηρίζεται στο έδαφος. Σε μια στιγμή t_0 , ο δίσκος βρίσκεται στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του έχοντας επιτάχυνση μέτρου $|a_1|$. Τη στιγμή αυτή αφήνεται πάνω στο δίσκο (με μηδενική ταχύτητα) ένα σώμα Σ , μάζας $M=3\text{kg}$, το οποίο αποκτά επίσης αρχική επιτάχυνση μέτρου $|a_1|$.



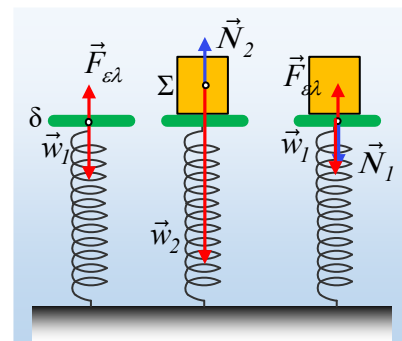
- i) Να υπολογιστεί το μέτρο της επιτάχυνση $|a_1|$.
- ii) Να βρεθεί το πλάτος ταλάντωσης του δίσκου, πριν και μετά την τοποθέτηση του σώματος Σ .
- iii) Ποιο το μέτρο της μέγιστης δύναμης που ο δίσκος ασκεί στο σώμα Σ , στη διάρκεια της ταλάντωσης τους;
- iv) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης, σε συνάρτηση με την ταχύτητα του δίσκου, για την αρχική ταλάντωση του δίσκου και, για την ταλάντωση του συστήματος μετά την τοποθέτηση του σώματος Σ , στο ίδιο διάγραμμα.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- i) Πριν την τοποθέτηση του σώματος Σ , πάνω στο δίσκο, αυτός δέχεται τις δυνάμεις βάρος και $F_{ελ}$, όπως στο σχήμα (υποθέτουμε ότι η δεύτερη έχει φορά προς τα πάνω). Οπότε από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα, λαμβάνοντας υπόψη ότι η επιτάχυνση κατευθύνεται προς τα κάτω (προς την θέση ισορροπίας), παίρνουμε:

$$\Sigma F_1 = ma_1 \rightarrow mg - |F_{ελ}| = ma_1 \quad (1)$$



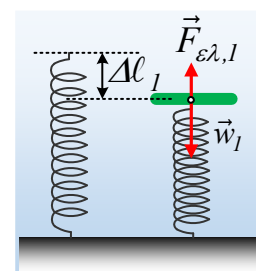
Στο μεσαίο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις στο σώμα Σ , όπου N_2

η δύναμη από τον δίσκο. Η αντίδρασή της N_1 ασκείται στο δίσκο, όπως στο 3^ο σχήμα. Οπότε εφαρμόζοντας ξανά για το δίσκο το 2^ο νόμο και λαμβάνοντας υπόψη ότι τα δύο σώματα θα κινηθούν μαζί, έχοντας κοινή επιτάχυνση, παίρνουμε:

$$\Sigma F_1 = ma'_1 \rightarrow mg - |F_{ελ}| + N_1 = ma_1 \quad (2)$$

Με σύγκριση των εξισώσεων (1) και (2) προκύπτει ότι $N_1=0$, δηλαδή δεν ασκείται δύναμη μεταξύ των δύο σωμάτων. Αλλά τότε και $N_2=0$ και το σώμα Σ δέχεται μόνο το βάρος αποκτώντας επιτάχυνση με φορά προς τα κάτω με μέτρο $|a_1|=g=10\text{m/s}^2$.

- ii) Με βάση το προηγούμενο ερώτημα και ο δίσκος πριν την τοποθέτηση του σώματος Σ είχε επιτάχυνση $a_1=g$, οπότε η δύναμη του ελατηρίου που σημειώσαμε στο σχήμα, είναι μηδενική και το ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του, στην ανώτερη θέση της ταλάντωσης του.



Εξάλλου για την θέση ισορροπίας της αρχικής ταλάντωσης, θα ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \rightarrow F_{ελ,1} = mg \rightarrow k\Delta\ell_1 = mg \rightarrow$$

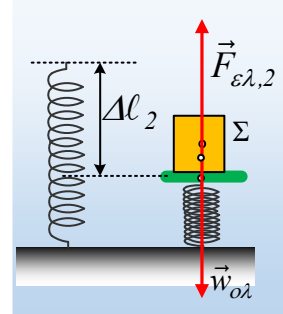
$$\Delta\ell_1 = \frac{mg}{k} = \frac{1 \cdot 10}{100} m = 0,1m$$

Συνεπώς και το αρχικό πλάτος ταλάντωσης είναι $A_1 = \Delta\ell_1 = 0,1m$.

Με την ίδια λογική για την νέα ταλάντωση του συστήματος δίσκος-σώμα Σ, θα έχουμε για την νέα θέση ισορροπίας:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \rightarrow F_{ελ,2} = (m+M)g \rightarrow k\Delta\ell_2 = (m+M)g \rightarrow$$

$$\Delta\ell_2 = \frac{(m+M)g}{k} = \frac{(1+3) \cdot 10}{100} m = 0,4m$$

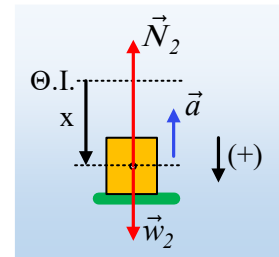


Αλλά και τώρα το σύστημα των δύο σωμάτων ξεκινά την ταλάντωσή του από την πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης του, οπότε και πάλι $A_2 = \Delta\ell_2 = 0,4m$.

iii) Έστω μια τυχαία θέση του σώματος Σ, η οποία απέχει κατά x από την θέση ισορροπίας, όπου έχουμε πάρει θετική την φορά προς τα κάτω. Ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα για το σώμα Σ δίνει (δουλεύουμε με αλγεβρικές τιμές):

$$\Sigma F = Ma \rightarrow Mg + N_2 = M(-\omega_2^2 x) \rightarrow$$

$$N_2 = -Mg - M\omega_2^2 x = -(Mg + M\omega_2^2 x)$$



Το αρνητικό πρόσημο στην παραπάνω σχέση, μας λέει ότι η N_2 έχει φορά προς τα πάνω, οπότε το μέτρο της γίνεται μέγιστο, όταν η απομάκρυνση γίνεται μέγιστη, με φορά προς τα κάτω, όταν δηλαδή το σώμα βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης του. Έτσι με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$|N_{2,max}| = |-(Mg + M\omega_2^2 A_2)| = Mg + M \left(\sqrt{\frac{k}{M+m}} \right)^2 A_2 \rightarrow$$

$$|N_{2,max}| = 3 \cdot 10N + 3 \left(\sqrt{\frac{100}{3+1}} \right)^2 \cdot 0,4N = 30N + 30N = 60N$$

iv) Για την ταλάντωση του δίσκου, πριν την τοποθέτηση του σώματος Σ, έχουμε:

$$|v_{max,1}| = \omega_1 A_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} A_1 = \sqrt{\frac{100}{1}} 0,1m/s = 1m/s$$

Ενώ από την διατήρηση της ενέργειας ταλάντωσης παίρνουμε:

$$K_1 + U_1 = E_1 \rightarrow U_1 = E_1 - K_1 = \frac{1}{2} k A_1^2 - \frac{1}{2} m v^2 \xrightarrow{\text{αντικατάσταση}}$$

$$U_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} v^2 \quad (S.I.)$$

Η γραφική παράσταση της παραπάνω σχέσης είναι μια παραβολή με τα κοίλα κάτω, όπως η καμπύλη α:

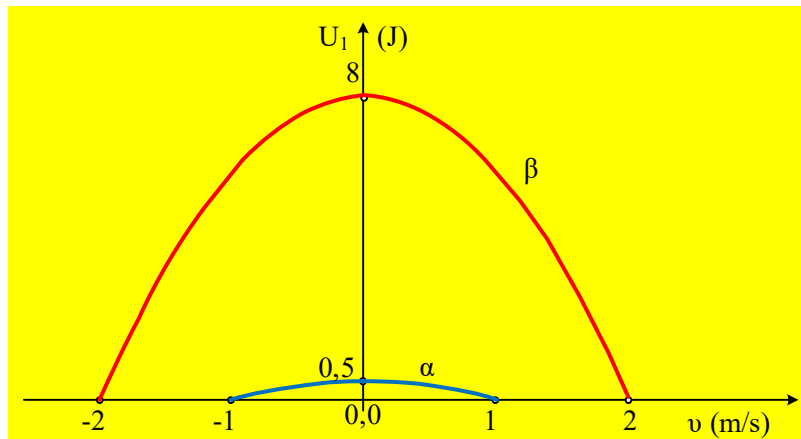
Για την ταλάντωση του συστήματος δίσκος-σώμα Σ (το σύστημα το αντιμετωπίζουμε σαν ένα υλικό σημείο), μετά την τοποθέτηση του σώματος Σ , έχουμε:

$$|v_{max,2}| = \omega_2 A_2 = \sqrt{\frac{k}{M+m}} A_2 = \sqrt{\frac{100}{3+1}} 0,4 \text{ m/s} = 2 \text{ m/s}$$

Ενώ από την διατήρηση της ενέργειας ταλάντωσης παίρνουμε:

$$K_2 + U_2 = E_2 \rightarrow U_2 = E_2 - K_2 = \frac{1}{2} k A_2^2 - \frac{1}{2} (M+m) v^2 \xrightarrow{\text{αντικατάσταση}} \\ U_2 = 8 - 2v^2 \quad (S.I.)$$

Και πάλι έχουμε μια παραβολή με τα κοίλα κάτω, όπως η καμπύλη β .



dmargaris@gmail.com