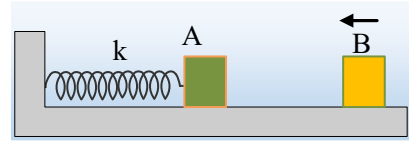


Μετρώντας χρόνους βρίσκουμε ενέργειες

Ένα σώμα Α εκτελεί αατ, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς $k=80\text{N/m}$, με εξίσωση απομάκρυνσης $x=0,25\cdot\eta\mu(2\pi t)$ (μονάδες στο S.I. και θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά). Ένα δεύτερο σώμα μάζας 2kg κινείται κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου προς τα αριστερά, όπως στο σχήμα και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα Α τη χρονική στιγμή $t_1=5/4\text{s}$. Αν η ταχύτητα του σώματος Α, μηδενίζεται για πρώτη φορά, μετά την κρούση, τη στιγμή $t_2=19/12\text{s}$, να βρεθούν:



- Η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος Α, ελάχιστα πριν την κρούση.
- Η επιτάχυνση του σώματος Α τη στιγμή t_2 .
- Ποια χρονική στιγμή πρόκειται να συγκρουστούν τα σώματα για δεύτερη φορά.
- Να υπολογισθεί η ενέργεια ταλάντωσης του σώματος Α, καθώς και η κινητική ενέργεια του Β σώματος, μετά την δεύτερη μεταξύ τους κρούση.

Δίνεται $\pi^2 \approx 10$.

Απάντηση:

- Με αντικατάσταση στην εξίσωση της απομάκρυνσης $t=t_1$, βρίσκουμε την θέση της κρούσης:

$$x_1 = 0,25 \cdot \eta\mu(2\pi \cdot t) = 0,25 \cdot \eta\mu\left(2\pi \frac{5}{4}\right) = 0,25\text{m}$$

Δηλαδή η πρώτη κρούση πραγματοποιείται στην ακραία δεξιά θέση της ταλάντωσης του σώματος, συνεπώς έχουμε μηδενική ταχύτητα και επιτάχυνση:

$$a_1 = -\omega^2 \cdot x_1 = -(2\pi)^2 \cdot 0,25 \text{ m/s}^2 \approx -10 \text{ m/s}^2.$$

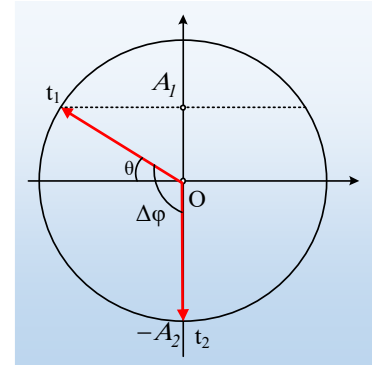
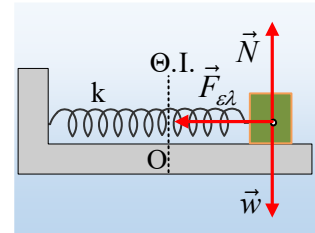
- Αφού η κρούση έγινε στην δεξιά ακραία θέση, το σώμα Α θα αποκτήσει ταχύτητα προς τα αριστερά, οπότε η ταχύτητά του θα μηδενιστεί, για πρώτη φορά, στην δεξιά ακραία θέση της νέας του ταλάντωσης, όπου η ταλάντωση αυτή έχει την ίδια θέση ισορροπίας Ο και την ίδια περίοδο:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} \text{ s} = 1\text{s}.$$

Αλλά τότε σχεδιάζοντας τον κύκλο αναφοράς της ταλάντωσης αυτής, το σώμα μετακινείται από την θέση A_1 στην θέση $x=-A_2$, όπως στο σχήμα, έχοντας διαγράψει την γωνία $\Delta\varphi$, όπου:

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t = 2\pi(t_2 - t_1) = 2\pi\left(\frac{19}{12} - \frac{5}{4}\right) = \frac{2\pi}{3} \rightarrow$$

$$\theta = \Delta\varphi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$



Οπότε:

$$\eta\mu\theta = \frac{A_1}{A_2} \rightarrow A_2 = \frac{A_1}{\eta\mu\theta} = \frac{0,25}{1/2} m = 0,5m.$$

Αλλά τότε η επιτάχυνση του σώματος είναι ίση:

$$a_2 = -\omega^2 \cdot x_2 = -(2\pi)^2 \cdot (-0,5) \text{ m/s}^2 \approx +20 \text{ m/s}^2.$$

iii) Για την σταθερά επαναφοράς του σώματος Α έχουμε:

$$D = k = m_1 \omega^2 \rightarrow m_1 = \frac{k}{\omega^2} = \frac{80}{(2\pi)^2} \text{ kg} = 2 \text{ kg}$$

Βλέπουμε δηλαδή το σώμα Α να έχει ίση μάζα με το Β. Αλλά τότε κατά την κεντρική ελαστική μεταξύ τους κρούση ανταλλάσσουν ταχύτητες, όπου αφού η ταχύτητα πριν την κρούση του Α ήταν μηδενική, το Β θα μείνει ακίνητο μετά την κρούση, στη θέση $x_1=0,25\text{m}$. Στη θέση αυτή θα επιστρέψει το σώμα Α και θα ακολουθήσει δεύτερη κρούση, αφού η φάση του μεταβληθεί κατά $2\Delta\phi$ (βλέπε τον κύκλο αναφοράς δίπλα) τη χρονική στιγμή t_3 , όπου:

$$t_3 = t_1 + 2\Delta t_{12} = t_1 + 2\frac{T}{3} = \frac{5}{4}s + 2\frac{1}{3}s = \frac{23}{12}s$$

Αφού $\Delta\phi=2\pi/3$ σε χρόνο $\Delta t = T/3$.

iv) Μετά την δεύτερη κρούση μεταξύ των δύο σωμάτων, αφού αυτά θα ανταλλάξουν ξανά ταχύτητες, το Α θα αποκτήσει μηδενική ταχύτητα, ενώ το Β θα κινηθεί προς τα δεξιά με ταχύτητα μέτρου v_B , ίση με αυτή που είχε και πριν την πρώτη κρούση! Πράγματι κατά την πρώτη κρούση, όλη η κινητική ενέργεια του Β μεταφέρθηκε στο Α σώμα. Πόση ήταν αυτή; Όση είναι η κινητική ενέργεια του Α αμέσως μετά την κρούση, αφού προηγούμενα βρισκόταν σε θέση πλάτους με μηδενική ταχύτητα. Αλλά τότε από την ενέργεια ταλάντωσης, μεταξύ της θέσης $x_1=A_1$, αμέσως μετά την κρούση και της θέσης $x_2=-A_2$, παίρνουμε:

$$K_1 + U_1 = E_2 \rightarrow K_1 + \frac{1}{2}kA_1^2 = \frac{1}{2}kA_2^2 \rightarrow$$

$$K_1 = \frac{1}{2}kA_2^2 - \frac{1}{2}kA_1^2 = \frac{1}{2}80(0,5^2 - 0,25^2) \text{ J} = 7,5 \text{ J}$$

Τελικά δηλαδή το Β σώμα θα απομακρυνθεί με κινητική ενέργεια $K_2=7,5\text{J}$, ενώ το Α θα ταλαντωθεί με την αρχική ενέργεια που είχε και πριν την πρώτη κρούση:

$$E_1 = \frac{1}{2}kA_1^2 = \frac{1}{2}80 \cdot 0,25^2 \text{ J} = 2,5 \text{ J}$$

