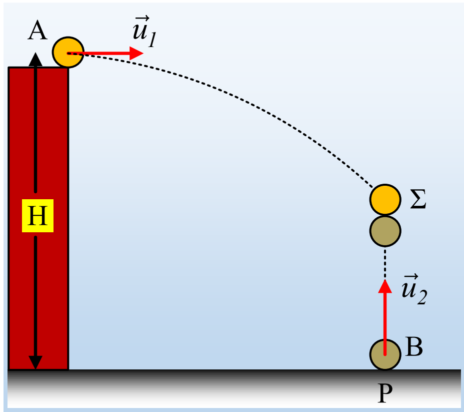
Μια πλάγια ελαστική κρούση στον αέρα.

Μια μικρή σφαίρα Α μάζας m_1=0,3kg, εκτοξεύεται τη στιγμή t_0=0 οριζόντια, με αρχική ταχύτητα μέτρου u_1=10m/s, από ύψος H=8,75m, όπως στο σχήμα. Μετά από λίγο, μια δεύτερη σφαίρα μάζας m_2=0,2kg, εκτοξεύεται από το σημείο Ρ του εδάφους, κατακόρυφα με αρχική ταχύτητα μέτρου u_2=10m/s. Τη χρονική στιγμή t_1= 1s, καθώς ανεβαίνει η Β σφαίρα, συναντά την Α με την οποία συγκρούεται ελαστικά στον αέρα, στο σημείο Σ.



i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα της Β σφαίρας, ελάχιστα πριν την κρούση.

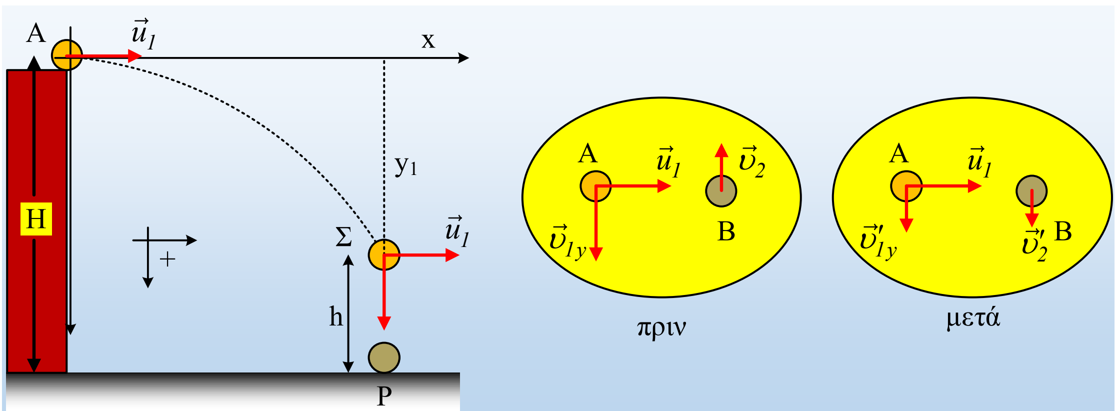
ii) Αν η κρούση μεταξύ των δύο σφαιρών διαρκεί απειροελάχιστα, να υπολογιστούν οι ταχύτητες των σφαιρών ελάχιστα μετά την κρούση.

iii) Να βρεθεί η μεταβολή της ορμής κάθε σφαίρας που οφείλεται στην κρούση.

iv) Ποια η τελική κινητική ενέργεια με την οποία η Α σφαίρα φτάνει στο έδαφος;

Δίνεται g=10m/s^2.

Απάντηση:



i) Για την οριζόντια βολή που πραγματοποιεί η Α σφαίρα, λαμβάνοντας την προς τα κάτω κατεύθυνση ως θετική, ισχύουν οι εξισώσεις:

Άξονας x	Άξονας y
$\upsilon_{1x}= u_1$ (1)	$\upsilon_{1y}=gt$ (3)
$x_1=u_1 \cdot t$ (2)	$y_1= ½\, gt^2$ (4)

Αλλά τότε ελάχιστα πριν την κρούση, βρίσκεται στο σημείο Σ, έχοντας μετατοπισθεί κατακόρυφα κατά (εξίσωση (4)):

$$y_1 = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} 10 \cdot 1^2 m = 5m$$

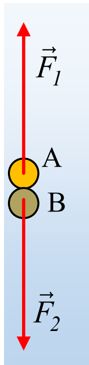
Έχοντας αποκτήσει κατακόρυφη συνιστώσα ταχύτητας:

$$\upsilon_{1y}= gt=10\cdot 1m/s=10m/s$$

Αλλά τότε το Β σώμα έχει ανέβει κατά h, από το έδαφος, όπου $h=H-y_1=8{,}75m-5m=3{,}75m$. Έτσι εφαρμόζοντας για το σώμα Β την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, θεωρώντας ότι στο έδαφος U=0, παίρνουμε:

$$K_{2,\alpha\rho\chi}+U_{2,\alpha\rho\chi}=K_{2,\tau}+U_{2,\tau}\rightarrow$$
$$\frac{1}{2}m_2u_2^2+0=\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2+m_2gh\rightarrow$$
$$|\upsilon_2|=\sqrt{u_2^2-2gh}=\sqrt{10^2-2\cdot 10\cdot 3{,}75}m/s=5m/s$$

Ενώ η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας είναι υ_2=-5m/s (φορά προς τα πάνω).



ii) Η ελαστική κρούση μεταξύ των δύο σφαιρών, είναι πλάγια, όπου στην πραγματικότητα η ασκούμενη δύναμη στις σφαίρες στη διάρκεια της κρούσης, είναι κατακόρυφη, οπότε δεν αλλάζει κάτι στην οριζόντια διεύθυνση (στο σχήμα δεν έχουν σχεδιαστεί τα δύο βάρη, αφού θεωρούνται αμελητέα σε σύγκριση με τις εσωτερικές κρουστικές δυνάμεις F_1 και F_2). Έτσι εφαρμόζοντας την ΑΔΟ και την διατήρηση της κινητικής ενέργειας για το σύστημα, παίρνουμε:

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu}=\vec{p}_{\mu\varepsilon\tau}\rightarrow\begin{cases} p_{1x}+0=p'_{1x}+0\rightarrow\upsilon'_{1x}=\upsilon_{1x} \quad (5)\\ p_{1y}+p_{2y}=p'_{1x}+p'_{2x}\rightarrow\\ m_1\upsilon_{1y}+m_2\upsilon_2=m_1\upsilon'_{1y}+m_2\upsilon'_2 \quad (6)\end{cases}$$

$$K_{\pi\rho\iota\nu}=K_{\mu\varepsilon\tau}\rightarrow\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2\rightarrow$$
$$\frac{1}{2}m_1\left(\upsilon_{1x}^2+\upsilon_{1y}^2\right)+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2=\frac{1}{2}m_1\left(\upsilon_{1x}^2+\upsilon_{1y}'^2\right)+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2\rightarrow$$
$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1y}^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2=\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1y}'^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 \quad (7)$$

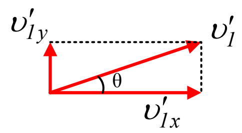
Οι εξισώσεις (6) και (7) αποτελούν το «γνωστό» μας από την θεωρία, σύστημα εξισώσεων για την **κεντρική** ελαστική κρούση! Με άλλα λόγια, έχουμε κεντρική ελαστική κρούση στην διεύθυνση y, ενώ δεν υπάρχει καμιά κρούση στην οριζόντια διεύθυνση x. Αλλά τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε του γνωστούς μας τύπους και να βρούμε:

$$\upsilon'_{1y}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_{1y}+\frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_2=\frac{0{,}3-0{,}2}{0{,}3+0{,}2}10m/s+\frac{2\cdot 0{,}2}{0{,}3+0{,}2}(-5)m/s=-2m/s$$

$$\upsilon'_{2y}=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_{1y}+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\upsilon_2=\frac{2\cdot 0{,}3}{0{,}3+0{,}2}10m/s+\frac{0{,}2-0{,}3}{0{,}3+0{,}2}(-5)m/s=13m/s$$

Οπότε ενώ η 2η σφαίρα κινείται ξανά στην κατακόρυφη διεύθυνση, η Α σφαίρα θα έχει ταχύτητα μέτρου:

$$\upsilon_1' = \sqrt{\upsilon_{1x}^2 + \upsilon_{1y}^2} = \sqrt{10^2 + 2^2}\, m/s = \sqrt{104}\, m/s$$



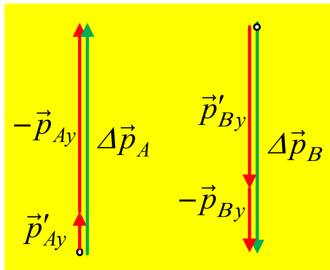
Με διεύθυνση που σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ (σχήμα), όπου:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{|\upsilon_{1y}'|}{\upsilon_{1x}'} = \frac{2}{10} = 0,2$$

iii) Για την Α σφαίρα, έχουμε για την μεταβολή της ορμής της (θετική φορά προς τα κάτω):

$$\Delta\vec{p}_A = \vec{p}_{A,\mu\varepsilon\tau} - \vec{p}_{A,\pi\rho} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \Delta p_{A,x} = m_1\upsilon_{1x}' - m_1\upsilon_{1x} = 0 \\ \Delta p_{A,y} = m_1\upsilon_{1y}' - m_1\upsilon_{1y} = 0,3(-2-10)\, kgm/s = -3,6\, kgm/s \end{cases}$$



Για την σφαίρα Β:

$$\Delta\vec{p}_B = \vec{p}_{B,\mu\varepsilon\tau} - \vec{p}_{B,\pi\rho} \rightarrow \Delta p_B = m_2\upsilon_2' - m_2\upsilon_2 = 0,2(13-(-5))\, kgm/s = 3,6\, kgm/s$$

iv) Από την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για τις θέσεις αμέσως μετά την κρούση και τη στιγμή που η σφαίρα φτάνει στο έδαφος, παίρνουμε:

$$K_{2,\alpha\rho\chi} + U_{2,\alpha\rho\chi} = K_{2,\tau} + U_{2,\tau} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 + m_2gh = \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 + 0 \rightarrow$$

$$K_{2,\tau} = \frac{1}{2}0,2\cdot 13^2\, J + 0,2\cdot 10\cdot 3,75 J = 24,4 J$$

dmargaris@gmail.com