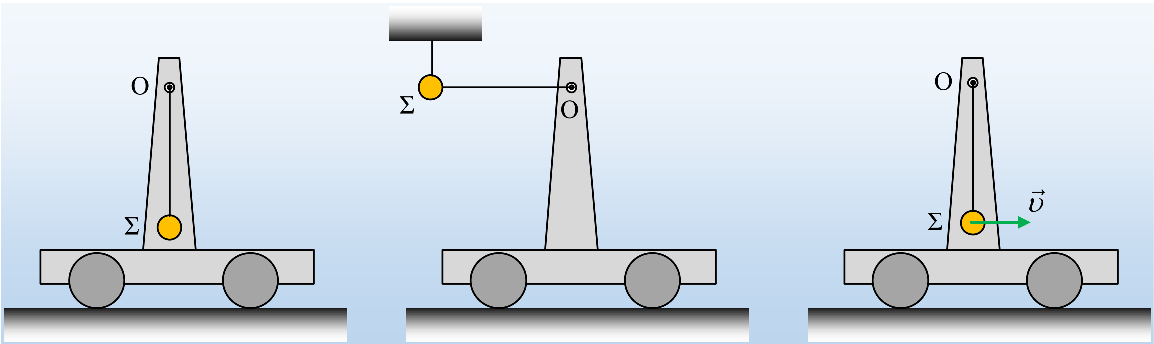
Γιατί να κινηθεί το αμαξίδιο;

Ένα αμαξίδιο με «πλάτη» ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ενώ μια σφαίρα μάζας m=1kg, κρέμεται στο άκρο κατακόρυφου μη εκτατού νήματος, αμελητέας μάζας, μήκους ℓ=0,5m, το άλλο άκρο του οποίου έχει δεθεί στο σημείο Ο της πλάτης, όπως στο πρώτο από τα παρακάτω σχήματα:



i) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα των δύο σωμάτων αμαξίδιο-σφαίρα και να εξετάσετε αν το σύστημα είναι μονωμένο.

ii) Εκτρέπουμε τη σφαίρα, καθιστώντας το νήμα οριζόντιο και ταυτόχρονα δένουμε τη σφαίρα στο άκρο ενός δεύτερου κατακόρυφου νήματος, όπως στο μεσαίο σχήμα. Το σύστημα και πάλι ηρεμεί.

α) Αφού σχεδιάσετε τις εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα του παραπάνω συστήματος, να εξετάσετε αν το σύστημα είναι τώρα μονωμένο.

β) Ένας συμμαθητής σας υποστηρίζει ότι μέσω του νήματος, η σφαίρα ασκεί δύναμη στο αμαξίδιο. Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με την θέση αυτή;

iii) Σε μια στιγμή $t_0=0$, κόβουμε το κατακόρυφο νήμα, οπότε η σφαίρα θα κινηθεί προς τα κάτω. Για την στιγμή αμέσως μετά (t_0^+):

α) Να εξετάσετε αν το σύστημα των σωμάτων είναι μονωμένο.

β) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της ορμής:

$β_1$) της σφαίρας, $β_2$) του αμαξιδίου, $β_3$) του συστήματος.

iv) Μετά από λίγο η σφαίρα περνά από το χαμηλότερο σημείο της τροχιάς της, με το νήμα κατακόρυφο, έχοντας ταχύτητα υ=3m/s, όπως στο 3^o σχήμα.

α) Να εξηγήσετε γιατί την στιγμή αυτή, το αμαξίδιο έχει αποκτήσει κάποια ταχύτητα, αντίθετης φοράς (προς τα αριστερά).

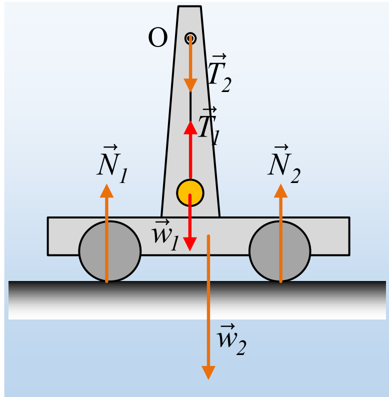
β) Να βρείτε την συνολική μάζα του αμαξιδίου (μαζί με την πλάτη…).

Δίνεται $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

i) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στην σφαίρα και στο αμαξίδιο. Από την ισορροπία κάθε σώματος παίρνουμε:

$$\Sigma \vec{F}_{\sigma} = 0 \rightarrow T_1 = w_1 = m_1 g \quad (1)$$
$$\Sigma \vec{F}_{\alpha} = 0 \rightarrow N_1 + N_2 = w_2 + T_2 \quad (2)$$

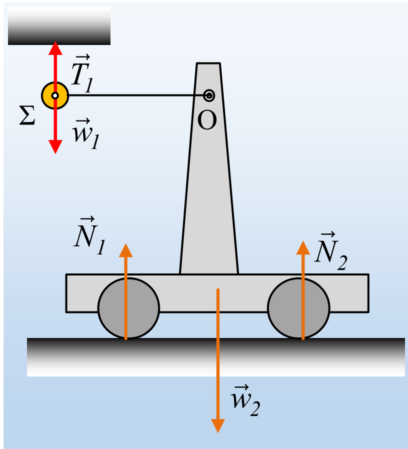


Όπου $T_1=T_2$ η τάση του αβαρούς νήματος, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε:

$$N_1 + N_2 = w_2 + T_2 = m_2 g + m_1 g \quad \rightarrow$$
$$N_1 + N_2 - m_1 g - m_2 g = 0 \rightarrow$$
$$\Sigma \vec{F}_{\varepsilon\xi} = 0$$

Ένα σύστημα σε ακινησία άλλωστε, δεν θα μπορούσε παρά να είναι μονωμένο, αφού αν υπήρχε συνισταμένη εξωτερική δύναμη, θα το έθετε σε κίνηση (όλο ή μέρος του)…

ii) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα, όπου η τάση T_1 του κατακόρυφου νήματος είναι τώρα εξωτερική, για το σύστημα.



α) Από τις ισορροπίες τώρα των σωμάτων παίρνουμε:

$$\Sigma \vec{F}_{\sigma} = 0 \rightarrow T_1 - m_1 g = 0 \quad (1\alpha)$$
$$\Sigma \vec{F}_{\alpha,y} = 0 \rightarrow N_1 + N_2 - m_2 g = 0 \quad (2\alpha)$$

Αλλά τότε με πρόσθεση κατά μέλη, των παραπάνω εξισώσεων, θα έχουμε για την συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων:

$$\Sigma F_{\varepsilon\xi} = N_1 + N_2 + T_1 - m_1 g - m_2 g = 0 \rightarrow$$
$$\Sigma \vec{F}_{\varepsilon\xi} = 0$$

Και πάλι δηλαδή το σύστημα είναι μονωμένο.

β) Η υποστηριζόμενη θέση είναι λανθασμένη. Αν το οριζόντιο νήμα ασκούσε στα σώματα δύναμη (την τάση του νήματος), τότε ούτε η σφαίρα, ούτε το αμαξίδιο θα παρέμεναν ακίνητα.

iii) Μόλις κοπεί το νήμα, η σφαίρα δέχεται μόνο το βάρος αποκτώντας επιτάχυνση κατακόρυφη ίση με g, ενώ το αμαξίδιο δεν δέχεται κάποια οριζόντια δύναμη που θα μπορούσε να το επιταχύνει.

α) Το σύστημα δεν είναι μονωμένο, αφού ναι μεν για το αμαξίδιο $\Sigma F_{\varepsilon\xi}=0$, πράγμα όμως που δεν ισχύει για την σφαίρα.

β) Για τους ζητούμενους ρυθμούς της ορμής έχουμε:

β_1) Για τη σφαίρα:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{w}_1 \rightarrow \frac{dp_1}{dt} = m_1 g = 1 \cdot 10 kg \cdot m/s = 10 kg \cdot m/s^2.$$

Ένα κατακόρυφο διάνυσμα με φορά προς τα κάτω.

β_2) Για το αμαξίδιο: $\quad {d\vec{p}_2}/{dt} = \Sigma \vec{F}_{\varepsilon\xi} = 0$

β3) Για το σύστημα:

$$\frac{d\vec{p}_{ο\lambda}}{dt}=\frac{d\vec{p}_1}{dt}+\frac{d\vec{p}_2}{dt}\rightarrow$$
$$\frac{dp_{ο\lambda}}{dt}=\frac{dp_1}{dt}+0=10kg\cdot m/s^2.$$

Επίσης κατακόρυφης διεύθυνσης.

iv) Στη διάρκεια της πτώσης της σφαίρας, αυτή αποκτά οριζόντια ορμή $\vec{p}_1=m_1\vec{\upsilon}$, πράγμα που οφείλεται στην άσκηση κάποιας οριζόντιας δύναμης που ασκήθηκε πάνω της, από το αμαξίδιο, με φορά προς τα δεξιά.

α) Αλλά η δύναμη αυτή είναι εσωτερική για το σύστημα και η αντίδρασή της, με φορά προς τα αριστερά, ασκείται στο αμαξίδιο, με αποτέλεσμα αυτό να αποκτήσει οριζόντια ορμή $\vec{p}_2=m_2\vec{u}$, με φορά προς τα αριστερά.

β) Από την διατήρηση της ορμής στην οριζόντια διεύθυνση, μεταξύ της αρχικής θέσης με οριζόντιο το νήμα και τελικής τη στιγμή που το νήμα γίνεται κατακόρυφο, λαμβάνοντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική, παίρνουμε:

$$\vec{p}_{1,\alpha}+\vec{p}_{2,\alpha}=\vec{p}_{1,\tau}+\vec{p}_{2,\tau}\rightarrow$$
$$0+0=m_1\upsilon-m_2u\rightarrow m_2u=m_1\upsilon=3\quad (S.I.)$$

Ενώ από την ΑΔΜΕ, μεταξύ των δύο αυτών θέσεων και παίρνοντας U=0 την τελική θέση της σφαίρας παίρνουμε:

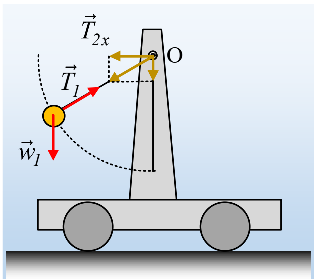
$$K_{\alpha\rho\chi}+U_{\alpha\rho\chi}=K_{\tau\varepsilon\lambda}+U_{\tau\varepsilon\lambda}\rightarrow$$
$$0+m_1g\ell=\frac{1}{2}m_1\upsilon^2+\frac{1}{2}m_2u^2+0\xrightarrow{\alpha\nu\tau\iota\kappa}$$
$$m_2u^2=1\quad (S.I.)\quad (4)$$

Από (3) και (4) βρίσκουμε:

$$\frac{m_2u^2}{m_2u}=\frac{1}{3}\rightarrow u=\frac{1}{3}m/s\xrightarrow{(3)}$$
$$m_2=\frac{3}{u}=9kg$$

Σχόλιο.

Και αν αναρωτηθεί κάποιος ποια δύναμη επιταχύνει προς τα αριστερά το αμαξίδιο, δεν έχει παρά να σχεδιάσει τις δυνάμεις, όπως στο διπλανό σχήμα. Η συνισταμένη w_1 και T_1 επιταχύνει τη σφαίρα, ενώ η συνιστώσα της τάσης του νήματος T_{2x}, επιταχύνει το αμαξίδιο, προς τα αριστερά.



dmargaris@gmail.com