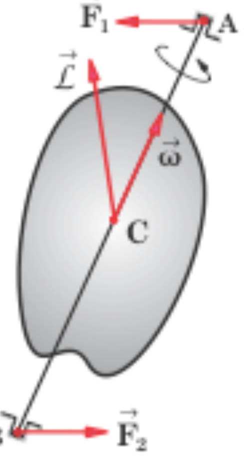
# Ισορροπία στερεού σώματος

## *Προσπάθεια να ορισθεί η έννοια της ισορροπίας στερεού σώματος*

Ας θεωρήσουμε στερεό σώμα που στρέφεται ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ περί άξονα που δεν είναι κύριος άξονας αδράνειας* αυτού, ο άξονας διέρχεται από το κέντρο μάζας του C και στηρίζεται σε δύο έδρανα όπως φαίνεται στο σχήμα (1). Το ερώτημα που μπορεί να τεθεί στην περίπτωση αυτή είναι αν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η **μεταφορική ακινησία** που παρουσιάζει το σώμα σε συνδυασμό με την χρονικά **αδιατάρακτη γωνιακή του ταχύτητα** συνιστούν κατάσταση ισορροπίας για το στερεό. Σύμφωνα με τον νόμο κίνησης του κέντρου μάζας, η ακινησία του επιβάλλει για το σώμα την σχέση:

$$\boldsymbol{\Sigma\vec{F} = \vec{0}}$$




**Σχήμα 1**

η οποία δηλώνει ότι η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που δέχεται το σώμα από το περιβάλλον του είναι μηδενική. Εξάλλου επειδή ο άξονας περιστροφής του σώματος δεν είναι κύριος άξονας αδράνειας η λεπτομεριακή μελέτη της περιστροφής του (**βλέπε 4ο λυμένο παράδειγμα**) καταλήγει στο απροσδόκητο αλλά σωστό συμπέρασμα ότι, η συνισταμένη ροπή των

-----------------------------------

* **Ένας άξονας όνομάζεται για ένα στερεό σώμα κύριος άξονας αδράνειας αυτού, εάν η στροφορμή του σώματος περί τον άξονα αυτόν και η αντίστοιχη γωνιακή του ταχύτητα είναι διανύσματα ομόρροπα με φορέα τον άξονα αυτόν. Εάν ο άξονας περιστροφής δεν είναι κύριος άξονας αδράνειας τότε το μεν διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας θα βρίσκεται πανω στον άξονα, αλλά το διάνυσμα της στροφορμής θα σχηματίζει γωνία με τον άξονα αυτόν.**

εξωτερικών δυνάμεων που δέχεται περί το κέντρο μάζας, είναι διάφορη του μηδενός, δηλαδή ισχύει η σχέση:

$$\Sigma\vec{\tau} \neq \vec{0}$$

Αν όμως ο άξονας περιστροφής του στερεού είναι κύριος άξονας αδράνειας αυτού, τότε η σταθερή του γωνιακή ταχύτητα επιβάλλει την σχέση:

$$\Sigma\vec{\tau} = \vec{0}$$

Παρατηρούμε λοιπόν τα εξής:

**α.** Αν ο σταθερός άξονας περιστροφής είναι κύριος άξονας αδράνειας του σώματος και η γωνιακή του ταχύτητα είναι χρονικά αμετάβλητη, τότε η κι νητική του κατάσταση επιβάλλει για το στερεό τις σχέσεις:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \quad \text{και} \quad \Sigma\vec{\tau} = \vec{0}$$

οι οποίες είναι ίδιες με εκείνες που χαρακτηρίζουν την στατική ή την μετα φορική ισορροπία του.

**β.** Αν ο σταθερός άξονας περιστροφής δεν είναι κύριος άξονας αδράνειας του σώματος και η γωνιακή του ταχύτητα είναι σταθερή, τότε για το στερεό ισχύουν οι σχέσεις:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \quad \text{και} \quad \Sigma\vec{\tau} \neq \vec{0}$$

Η δυϊκή αυτή συμπεριφορά του σώματος μας επιβάλλει να απορρίψουμε γενικώς την άποψη ότι η γνήσια περιστροφή ενός στερεού περί σταθερό άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα αποτελεί κατάσταση ποσοτικώς όμοια με εκείνη της στατικής ή μεταφορικής ισορροπίας. Στο σημείο αυτό θέλω ακόμη να επιμείνω επισημαίνοντας απόψεις που περιέχονται σε κάποια συγγράμματα. Υπάρχει ο ισχυρίσμος στα συγγράμματα αυτά ότι η κατά σταση γνήσιας περιστροφής στερεού σώματος περί σταθερό άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα είναι ασύμβιβαστη με την έννοια της ισορροπίας, διότι αν εστιάσουμε την προσοχή μας στα υλικά σημεία του στερεού, αυτά κινούμενα επί κυκλικών τροχιών με την ίδια σταθερή γωνιακή ταχύτητα έχουν κεντρο μόλο επιτάχυνση, που σημαίνει ότι μεταβάλλεται η κινητική τους κατάστα ση. Παρουσιάζεται επομένως η παραδοξότητα να θεωρούμε το σώμα σε ισορ ροπία, ενώ τα υλικά του σημεία δεν ισορροπούν. Κατά την γνώμη μου η παραδοξότητα αυτή παρακάμπτεται αν παρατηρήσουμε ότι οι νόμοι κίνησης των υλικών σημείων του στερεού κάτω από την επίδραση των εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων που δέχονται, διατηρούν την ανεξαρτησία τους έναντι οιουδήποτε ορισμού και το στατιστικό τους αποτέλεσμα οδηγεί για το στερεό στις σχέσεις:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \quad \text{και} \quad \Sigma\vec{\tau} = \vec{0}$$

όταν ο άξονας περιστροφής είναι κύριος άξονας αδράνειας ή στις σχέσεις:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \quad \text{και} \quad \Sigma\vec{\tau} \neq \vec{0}$$

στην περίπτωση που ο άξονας περιστροφής δεν είναι κύριος άξονας αδρά νειας, δηλαδή το γεγονός ότι τα υλικά σημεία του στερεού επιταχύνονται ουδόλως επηρεάζει την ισχύ των παραπάνω σχέσεων. Αν για όλους τους άξο νες περιστροφής και με σταθερή γωνιακή ταχύτητα οι νόμοι κίνησης των υλικών σημείων οδηγούσαν στις σχέσεις:

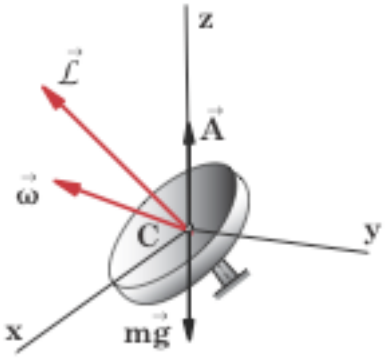
$$\boldsymbol{\Sigma\vec{F}=\vec{0}} \quad \textbf{και} \quad \boldsymbol{\Sigma\vec{\tau}=\vec{0}}$$

δεν θα δημιουργούσε παραδοξότητα να ορίσουμε την κατάσταση αυτή ως ισοδύναμη με την στατική ή μεταφορική ισορροπία. Τότε ο χαρακτηρισμός της καταστάσεως αυτής ως "ισορροπία" θα δήλωνε το αδιατάρακτο της κινη τικής του κατάστασης. Όμως το γεγονός ότι οι δύο παραπάνω σχέσεις δεν ισχύουν, όταν ο άξονας περιστροφής δεν είναι κύριος άξονας αδράνειας αποτελεί το πραγματικό εμπόδιο που μας απαγορεύει να εξομειώνουμε γενι κώς την γνήσια περιστροφή με σταθερή γωνιακή ταχύτητα με την στατική ή μεταφορική ισορροπία. Με βάση τις παραπάνω απόψεις μου πιστεύω στον ακόλουθο ορισμό της ισορροπίας στερεού σώματος.

***" Ένα στερεό σώμα ισορροπεί ως προς κάποιο αδρανειακό σύστη μα αναφοράς, όταν το κέντρο μάζας του ακινητεί ή κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς το σύστημα αυτό και επί πλέον το σώμα δεν περιστρέφεται "***

Με βάση τον ορισμό αυτόν θα αποδειχθεί παρακάτω ότι οι **αναγκαίες σχέ σεις** που συνοδεύουν την ισορροπία στερεού σώματος έχουν τη μορφή:

$$\boldsymbol{\Sigma\vec{F}=\vec{0}} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\Sigma\vec{\tau}=\vec{0}}$$




**Σχήμα 2**

Η πρώτη απορρέει από το γεγονός ότι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας είναι μηδενική και η δεύτερη από το γεγονός ότι το σώμα δεν περιστρέφε ται. Τίθεται όμως το ερώτημα αν οι δύο αυτές σχέσεις αποτελούν και **ικα νές συνθήκες** για να ισορροπεί ένα στερεό σώμα, δηλαδή αν οι εξωτερικές δυνάμεις επί του σώματος και οι ροπές τους ικανοποιούν τις δύο αυτές σχέ σεις, τότε το σώμα ισορροπεί; **Η σωστή απάντηση είναι όχι**. Για να τεκμη ριωθεί η άποψη αυτή θα αναφέρω την περίπτωση ενός στερεού που το κέντρο μάζας του είναι συνεχώς ακίνητο στο σύστημα αναφοράς του εδά φους (σχήμα 2) αλλά έχει την δυνατότητα να στρέφεται περί το κέντρο μάζας του. Ένα τέτοιο σώμα ονομάζεται στρόβος και χαρακτηριστικό παρά δειγμα είναι το λεγόμενο **γυροσκόπιο**. Δίνονοντας στο σώμα αυτό μια αρχική γωνιακή ταχύτητα θα τεθεί σε μια πολύπλοκη κίνηση που είναι γνωστή ως **μετάπτωση και κλόνηση**. Είναι προφανές ότι κατά την εξέλι ξη της κίνησης αυτής ισχύουν για τις εξωτερικές δυνάμεις που δέχεται το σώμα (βάρος $\mathbf{m}\vec{\mathbf{g}}$ και δύναμη επαφής $\vec{\mathbf{A}}$ στο σημείο στήριξης) και για τις ρο πές τους περί το κέντρο μάζας οι σχέσεις:

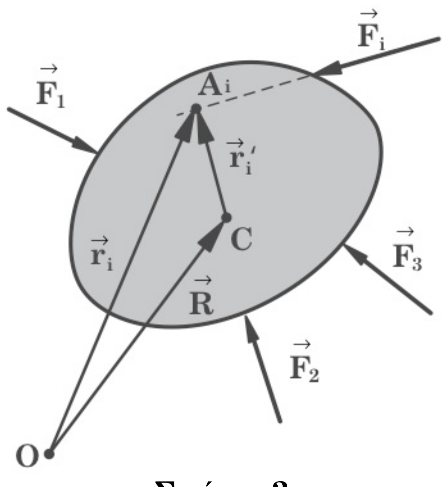
$$\Sigma\vec{\mathbf{F}}=\vec{\mathbf{0}} \quad \textbf{και} \quad \Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}}=\vec{\mathbf{0}}$$

Όμως το σώμα δεν ισορροπεί αλλά εκτελεί μια πολύπλοκη κίνηση και μά λιστα αποδεικνύεται ότι κατά την κίνηση αυτή η στροφορμή του περί το κέν τρο μάζας διατηρείται χρονικά αμετάβλητη, ενώ η γωνιακή του ταχύτητα εκτελεί μεταπτωτική κίνηση περί τον σταθερό άξονα της στροφορμής του. Συνεχίζοντας την μελέτη της ισορροπίας στερεού σώματος είναι απαραίτητο να αναφέρουμε το εξής σπουδαίο θεώρημα:

## *Γενικεύμενο θεώρημα των ροπών*

***Εάν σ' ένα στερεό σώμα ενεργούν πολλές δυνάμεις, τότε η ολική ροπή αυτών περί μία αρχή O, είναι ίση με την ολική ροπή των δυνάμεων περί το κέντρο μάζας C του σώματος, συν την ροπή περί την αρχή O της συνισταμένης που θα προκύψει από την αναγωγή των δυνάμεων στο κέντρο μάζας του σώματος.***

**Απόδειξη**: Έστω ότι στο σώμα ενεργούν οι δυνάμεις $\vec{\mathbf{F}}_1, \vec{\mathbf{F}}_2, \ldots \vec{\mathbf{F}}_n$. Εάν $\vec{\mathbf{r}}_i$, $\vec{\mathbf{r}}_i'$ είναι τα διανύσματα θέσεως επιβατικές ενός οιουδήποτε σημείου $A_i$ του φορέα της δύναμης $\vec{\mathbf{F}}_i$, ως προς την αρχή O και το κέντρο μάζας C του σώματος αντιστοίχως και $\vec{\mathbf{R}}$ το διάνυσμα θέσεως του C ως προς το O, τότε θα έχουμε:




**Σχήμα 3**

$$\vec{\mathbf{r}}_i=\vec{\mathbf{R}}+\vec{\mathbf{r}}_i' \quad \Rightarrow \quad \left(\vec{\mathbf{r}}_i\times\vec{\mathbf{F}}_i\right)=(\vec{\mathbf{R}}\times\vec{\mathbf{F}}_i)+(\vec{\mathbf{r}}_i'\times\vec{\mathbf{F}}_i) \quad \Rightarrow$$

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}_i^{(O)}=(\vec{\mathbf{R}}\times\vec{\mathbf{F}}_i)+\vec{\boldsymbol{\tau}}_i^{(C)} \qquad (1)$$

όπου $\vec{\boldsymbol{\tau}}_i^{(O)}$, $\vec{\boldsymbol{\tau}}_i^{(C)}$ οι ροπές της δύναμης $\vec{\mathbf{F}}_i$ περί την αρχή O και περί το κέντρο μάζας C αντιστοίχως. Ανάλογες σχέσεις προς την (1) μπορούμε να γράψουμε για όλες τις δυνάμεις που ενεργούν πάνω στο σώμα, οπότε θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\boldsymbol{\tau}}_1^{(O)} = \left(\vec{\mathbf{R}}\times\vec{\mathbf{F}}_1\right)+\vec{\boldsymbol{\tau}}_1^{(C)} \\ \vec{\boldsymbol{\tau}}_2^{(O)} = \left(\vec{\mathbf{R}}\times\vec{\mathbf{F}}_2\right)+\vec{\boldsymbol{\tau}}_2^{(C)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vec{\boldsymbol{\tau}}_n^{(O)} = \left(\vec{\mathbf{R}}\times\vec{\mathbf{F}}_n\right)+\vec{\boldsymbol{\tau}}_n^{(C)} \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} \;\Sigma\left(\vec{\boldsymbol{\tau}}_i^{(O)}\right) = \Sigma\left(\vec{\mathbf{R}}\times\vec{\mathbf{F}}_i\right)+\Sigma\left(\vec{\boldsymbol{\tau}}_i^{(C)}\right) \;\Rightarrow$$

$$\Sigma\left(\vec{\boldsymbol{\tau}}_i^{(O)}\right) = \left[\vec{\mathbf{R}}\times\Sigma\left(\vec{\mathbf{F}}_i\right)\right]+\Sigma\left(\vec{\boldsymbol{\tau}}_i^{(C)}\right) \;\Rightarrow\; \vec{\boldsymbol{\tau}}_{o\lambda}^{(O)} = \vec{\boldsymbol{\tau}}_{o\lambda}^{(C)} + \left(\vec{\mathbf{R}}\times\vec{\mathbf{F}}_{o\lambda}\right) \qquad (2)$$

όπου $\vec{\boldsymbol{\tau}}_{o\lambda}^{(O)}$ η ολική ροπή περί την αρχή O των δυνάμεων $\vec{\mathbf{F}}_1, \vec{\mathbf{F}}_2, \ldots\ \vec{\mathbf{F}}_n$ , $\vec{\boldsymbol{\tau}}_{o\lambda}^{(C)}$ η ολική ροπή τους περί το κέντρο μάζας C του σώματος και $\vec{\mathbf{F}}_{o\lambda}$ η συνισταμέ νη που θα προκύψει από την αναγωγή των δυνάμεων στο κέντρο μάζας του σώματος.

<u>**Παρατήρηση:**</u>

Εάν από την αναγωγή των δυνάμεων στο κέντρο μάζας του σώματος προκύ ψει συνισταμένη δύναμη μηδέν, τότε η ολική ροπή των δυνάμεων είναι ανε ξάρτητη της αρχής O, δηλαδή είναι η ίδια ως προς οποιαδήποτε αρχή. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα των δυνάμεων του σώματος ανάγεται σ' ένα ζεύγος δυνάμεων, του οποίου η ροπή είναι ίση προς την ολική ροπή των δυνάμεων περί οποιαδήποτε αρχή.

## *Συνθήκες ισορροπίας στερεού σώματος*

Θεωρούμε στερεό σώμα, το οποίο ισορροπεί ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, υπό την επίδραση των δυνάμεων $\vec{\mathbf{F}}_1, \vec{\mathbf{F}}_2, \ldots \vec{\mathbf{F}}_n$. Εάν οι δυνάμεις αυτές αναχθούν στο κέντρο μάζας C του σώματος θα πρέπει η συνισταμένη τους να είναι μηδέν, διότι το κέντρο μάζας του σώματος είναι ακίνητο ή κινείται ευθύγραμμα και ομαλά, λόγω της ισορροπίας του σώματος. Επί πλέον το σώμα δεν στρέφεται περί άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, οπότε η ολική ροπή των δυνάμεων περί το κέντρο μάζας του σώματος ή περί οποιοδήποτε άλλο σημείο αυτού είναι μηδέν. (βλέπε προηγούμενη παρα τήρηση) Από τα παραπάνω προκύπτει ότι, οι αναγκαίες συνθήκες ισορ ροπίας ενός στερεού σώματος είναι οι εξής:

$$\vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \ldots + \vec{\mathbf{F}}_n = \vec{\mathbf{0}} \;\Rightarrow\; \Sigma\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{0}} \qquad (1)$$

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}_1 + \vec{\boldsymbol{\tau}}_2 + \ldots + \vec{\boldsymbol{\tau}}_n = \vec{\mathbf{0}} \;\Rightarrow\; \Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{0}} \qquad (2)$$

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε κάποιες ειδικές περιπτώσεις ισορροπίας στερε ού σώματος *i) Το στερεό σώμα ισορροπεί υπό την επίδραση δύο μόνο δυνάμεων*

Στη περίπτωση αυτή πρέπει οι δύο δυνάμεις να έχουν τον ίδιο φορέα αντίθε τες φορές και ίσα μέτρα, διότι τότε και μονο τότε θα πληρούν τις συνθήκες ισορροπίας του στερεού.

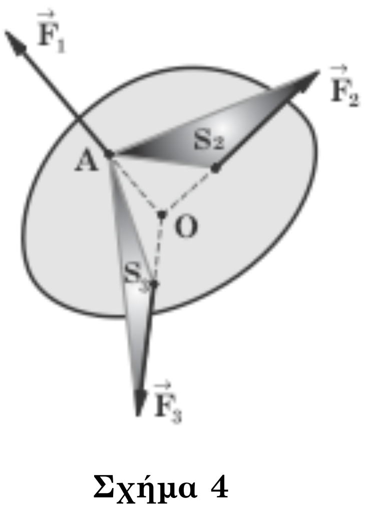
*ii) Το στερεό σώμα ισορροπεί υπό την επίδραση τριών δυνάμεων*

Στη περίπτωση αυτή πρέπει οι τρεις δυνάμεις να είναι συνεπίπεδες, οι φορείς τους να διέρχονται από το ίδιο σημείο και η συνισταμένη δύο οποιων δήποτε από αυτές να είναι αντίθετη με την τρίτη δύναμη. Για την απόδειξη αυτής της πρότασης θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο Α του φορέα της δύναμης $\vec{\mathbf{F}}_1$, οπότε οι ροπές $\vec{\tau}_1$, $\vec{\tau}_2$, $\vec{\tau}_3$ των δυνάμεων $\vec{\mathbf{F}}_1$, $\vec{\mathbf{F}}_2$, $\vec{\mathbf{F}}_3$ αντιστοίχως περί το Α θα ικανοποιούν τη σχέση:

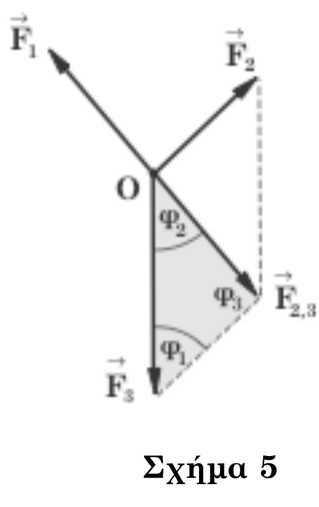
$$\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 = \vec{\mathbf{0}} \;\Rightarrow\; \vec{\mathbf{0}} + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 = \vec{\mathbf{0}} \;\Rightarrow\; \vec{\tau}_2 = -\vec{\tau}_3$$

δηλαδή τα διανύσματα $\vec{\tau}_2$, $\vec{\tau}_3$ είναι συνευθειακά και αντίθετα. Όμως το $\vec{\tau}_2$ είναι κάθετο στο επίπεδο $S_2$ που ορίζει το σημείο Α και ο φορέας της $\vec{\mathbf{F}}_2$ το δε $\vec{\tau}_3$ κάθετο στο αντίστοιχο επίπεδο $S_3$ που ορίζει το Α και ο φορέας της $\vec{\mathbf{F}}_3$, που σημαίνει ότι τα επίπεδα $S_2$ και $S_3$ συμπίπτουν, δηλαδή οι δυνάμεις $\vec{\mathbf{F}}_2$, $\vec{\mathbf{F}}_3$ είναι συνεπίπεδες. Εάν Ο είναι το σημείο τομής των φορέων τους (σχ. 4) πρέπει από το σημείο αυτό να διέρχεται και ο φορέας της δύναμης $\vec{\mathbf{F}}_1$, διότι σε αντίθετη περίπτωση η συνολική τους ροπή περί το Ο θα ήταν διάφορη του μηδενός, γεγονός που απαγορεύει η ισορροπία του στερεού. Όμως η ισορροπία του στερεού επιβάλλει και την σχέση:

$$\vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \vec{\mathbf{F}}_3 = \vec{\mathbf{0}} \;\Rightarrow\; \vec{\mathbf{F}}_1 = -(\vec{\mathbf{F}}_2 + \vec{\mathbf{F}}_3) = -\vec{\mathbf{F}}_{2,3}$$




**Σχήμα 4**




**Σχήμα 5**

δηλαδή η συνισταμένη $\vec{\mathbf{F}}_{2,3}$ των $\vec{\mathbf{F}}_2$, $\vec{\mathbf{F}}_3$ πρέπει να είναι αντίθετη της $\vec{\mathbf{F}}_1$, που σημαίνει ότι η $\vec{\mathbf{F}}_1$ είναι συνεπίπεδη των $\vec{\mathbf{F}}_2$, $\vec{\mathbf{F}}_3$. Εφαρμόζοντας εξάλλου στο σκιασμένο τρίγωνο του σχήματος (5) τον νόμο των ημιτόνων παίρνουμε:

$$\frac{F_{2,3}}{\eta\mu\varphi_1}=\frac{F_2}{\eta\mu\varphi_2}=\frac{F_3}{\eta\mu\varphi_3} \Rightarrow$$

$$\frac{F_1}{\eta\mu\left[\pi-(\vec{F}_2,\vec{F}_3)\right]} = \frac{F_2}{\eta\mu\left[\pi-(\vec{F}_1,\vec{F}_3)\right]} = \frac{F_3}{\eta\mu\left[\pi-(\vec{F}_1,\vec{F}_2)\right]} \Rightarrow$$

$$\frac{F_1}{\eta\mu(\vec{F}_2,\vec{F}_3)} = \frac{F_2}{\eta\mu(\vec{F}_1,\vec{F}_3)} = \frac{F_3}{\eta\mu(\vec{F}_1,\vec{F}_2)} \qquad (3)$$

Η σχέση (3) δηλώνει ότι, το μέτρο κάθε μιάς από τις τρεις δυνάμεις είναι ανάλογο του ημιτόνου της γωνίας που σχηματίζουν οι φορείς των δύο άλλων δυνάμεων.

***iii) Το στερεό σώμα ισορροπεί υπό την επίδραση πολλών συνεπιπέδων δυνάμεων***

Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε επί του επιπέδου των δυνάμεων δύο ορθο γώνιους άξονες Ox, Oy και προβάλλουμε τις δυνάμεις που ενεργούν στο σώμα, πάνω στους άξονες αυτούς. Εάν $\vec{i}$, $\vec{j}$ είναι οι διανυσματικές μονάδες των αξόνων Ox και Oy αντιστοίχως, τότε η σχέση (1) είναι ισοδύναμη με τις εξής δύο σχέσεις:

$$\vec{i}F_1+\vec{i}F_2+\dots+\vec{i}F_n=\vec{0} \;\Rightarrow\; \Sigma F_{ix}=\vec{0}$$

$$\vec{j}F_1+\vec{j}F_2+\dots+\vec{j}F_n=\vec{0} \;\Rightarrow\; \Sigma F_{iy}=\vec{0}$$

όπου $\Sigma F_{ix}$ και $\Sigma F_{iy}$ τα αθροίσματα των αλγεβρικών τιμών των προβολών των δυνάμεων, πάνω στους άξονες Ox και Oy αντιστοίχως. Εξάλλου, επειδή οι δυνάμεις που ενεργούν στο σώμα είναι συνεπίπεδες, οι ροπές αυτών περί οποιοδήποτε σημείο A του επιπέδου τους θα έχουν τον ίδιο φορέα, ο οποίος θα είναι κάθετος στο επίπεδο των δυνάμεων και θα διέρχεται από το σημείο A. Έτσι, εάν $\vec{k}$ είναι η διανυσματική μονάδα του φορέα αυτού, τότε η σχέ ση ισορροπίας (2) γράφεται:

$$\tau_1^{(A)}\vec{k}+\tau_2^{(A)}\vec{k}+\dots+\tau_n^{(A)}\vec{k}=\vec{0} \;\Rightarrow\; \Sigma\tau_i^{(A)}=0$$

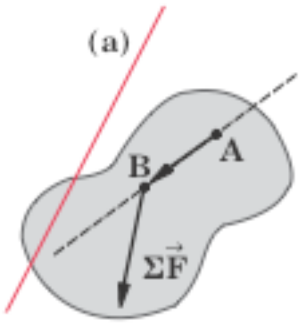
όπου $\Sigma\tau_i^{(A)}$ το άθροισμα των αλγεβρικών τιμών των ροπών των δυνάμεων, περί το θεωρούμενο σημείο A. Στο άθροισμα αυτό συμβατικά θεωρούνται θετικές οι αλγεβρικές τιμές των δεξιόστροφων ροπών και αρνητικές οι αλγεβρικές τιμές των αριστερόστροφων.

**Παρατήρηση:**

Όταν ένα στερεό σώμα ισορροπεί υπό την επίδραση πολλών συνεπίπεδων δυνάμεων έχουμε την δυνατότητα να χρησιμοποιούμε ως αναγκαίες συν θήκες ισορροπίας δύο ακόμη ομάδες εξισώσεων που κάθε ομάδα περιέχει τρεις ανεξάρτητες εξισώσεις, ισοδύναμες προς τις γενικές εξισώσεις ισορροπί ας που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Η μια ομάδα περιλαμβάνει τις εξισώσεις:

$$\boldsymbol{\Sigma\tau_{(A)}=0},\quad \boldsymbol{\Sigma\tau_{(B)}=0},\quad \boldsymbol{\Sigma F_{(a)}=0} \qquad \text{(i)}$$

όπου $\boldsymbol{\Sigma\tau_{(A)}}$, $\boldsymbol{\Sigma\tau_{(B)}}$ τα αλγεβρικά αθροίσματα των ροπών των δυνάμεων που ενεργούν στο σώμα, περί τα σημεία A και B αντιστοίχως του επιπέδου των δυνάμεων και $\boldsymbol{\Sigma F_{(a)}}$ το αλγεβρικό άθροισμα των προβολών των δυνάμεων

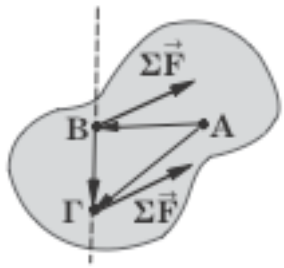



**Σχήμα 6**

πάνω σ' ένα άξονα (a) που ανήκει στο επίπεδό τους, αλλά δεν κατευθύνεται κάθετα προς την AB. Θα δείξουμε ότι οι εξισώσεις (i) εξασφαλίζουν τις γενικές αναγκαίες συνθήκες ισορροπίας $\boldsymbol{\Sigma\vec{F}=0}$ και $\boldsymbol{\Sigma\vec{\tau}=0}$, όπου $\boldsymbol{\Sigma\vec{F}}$ είναι η συνισταμένη των ομοεπιπέδων δυνάμεων και $\boldsymbol{\Sigma\vec{\tau}}$ η συνισταμένη ροπή τους περί ένα οποιοδήποτε σημείο. Πράγματι αν οι δυνάμεις αναχθούν στο σημείο B του στερεού θα προκύψει συνισταμένη δύναμη ίση με την $\boldsymbol{\Sigma\vec{F}}$ και θα ισχύει:

$$\boldsymbol{\Sigma\vec{\tau}_{(A)}=\Sigma\vec{\tau}_{(B)}+\left(\overrightarrow{AB}\times\Sigma\vec{F}\right)} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\vec{0}=\vec{0}+\left(\overrightarrow{AB}\times\Sigma\vec{F}\right)=\vec{0}} \;\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\left(\overrightarrow{AB}\times\Sigma\vec{F}\right)=\vec{0}}$$




**Σχήμα 7**

από την οποία προκύπτει ότι $\boldsymbol{\Sigma\vec{F}=0}$ ή ότι η $\boldsymbol{\Sigma\vec{F}}$ είναι συγγραμική με το διάνυσμα $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}}$. Η δεύτερη όμως εκδοχή αποκλείεται, διότι τότε η $\boldsymbol{\Sigma\vec{F}}$ ως μη κάθετη επί τον άξονα (a) θα έχει συνιστώσα παράλληλη προς τον άξονα αυτόν πράγμα που το αποκλείει η τρίτη από τις εξισώσεις (i). Άρα θα είναι $\boldsymbol{\Sigma\vec{F}=0}$ που σημαίνει ότι η συνισταμένη ρόπη $\boldsymbol{\Sigma\vec{\tau}}$ των δυνάμεων έχει την ίδια τιμή, όταν αναφέρεται σε οποιοδήποτε σημείο του στερεού ή της επέκτα σής του, δηλαδη θα είναι ίση με μηδέν.

Η άλλη ομάδα περιλαμβάνει τις εξισώσεις:

$$\boldsymbol{\Sigma\tau_{(A)}=0},\quad \boldsymbol{\Sigma\tau_{(B)}=0},\quad \boldsymbol{\Sigma\tau_{(\Gamma)}=0} \qquad \text{(ii)}$$

όπου $\boldsymbol{\Sigma\tau_{(A)}}$, $\boldsymbol{\Sigma\tau_{(B)}}$, $\boldsymbol{\Sigma\tau_{(\Gamma)}}$ τα αλγεβρικά αθροίσματα των ροπών των δυνάμε ων περί τα σημεία Α, Β και Γ αντιστοίχως του επιπέδου των δυνάμεων τα οποία όμως δεν βρισκονται στην ίδια ευθεία. Αν οι δυνάμεις αναχθούν στα σημεία Β και Γ του στερεου θα προκύψει συνισταμένη δύναμη $\boldsymbol{\Sigma\vec{F}}$ και θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma\vec{\tau}_{(A)}} &= \boldsymbol{\Sigma\vec{\tau}_{(B)}}+\left(\overrightarrow{\mathbf{AB}}\times\boldsymbol{\Sigma\vec{F}}\right)\\ \boldsymbol{\Sigma\vec{\tau}_{(A)}} &= \boldsymbol{\Sigma\vec{\tau}_{(\Gamma)}}+\left(\overrightarrow{\mathbf{A\Gamma}}\times\boldsymbol{\Sigma\vec{F}}\right)\end{aligned}\right\} \overset{(ii)}{\Rightarrow} \left.\begin{aligned}\vec{\mathbf{0}} &= \vec{\mathbf{0}}+\left(\overrightarrow{\mathbf{AB}}\times\boldsymbol{\Sigma\vec{F}}\right)\\ \vec{\mathbf{0}} &= \vec{\mathbf{0}}+\left(\overrightarrow{\mathbf{A\Gamma}}\times\boldsymbol{\Sigma\vec{F}}\right)\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}\left(\overrightarrow{\mathbf{AB}}\times\boldsymbol{\Sigma\vec{F}}\right) &= \vec{\mathbf{0}}\\ \left(\overrightarrow{\mathbf{A\Gamma}}\times\boldsymbol{\Sigma\vec{F}}\right) &= \vec{\mathbf{0}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\overrightarrow{\mathbf{AB}}\times\boldsymbol{\Sigma\vec{F}}\right)=\left(\overrightarrow{\mathbf{A\Gamma}}\times\boldsymbol{\Sigma\vec{F}}\right) \overset{(-)}{\Rightarrow}$$

$$\left[\left(\overrightarrow{\mathbf{AB}}-\overrightarrow{\mathbf{A\Gamma}}\right)\times\boldsymbol{\Sigma\vec{F}}\right]=\vec{\mathbf{0}}$$

Όμως $\left(\overrightarrow{\mathbf{AB}}-\overrightarrow{\mathbf{A\Gamma}}\right)\neq\vec{\mathbf{0}}$ διότι τα σημεία Α, Β, Γ, δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, οπότε αναγκαστικά θα είναι $\boldsymbol{\Sigma\vec{F}=0}$, που σημαίνει ότι η συνισταμένη ρόπη $\boldsymbol{\Sigma\vec{\tau}}$ των δυνάμεων έχει κοινή τιμή για όλα τα σημεία του στερεού ή της επέκτασής του, δηλαδη θα είναι ίση με μηδέν.

**P.M. fysikos**

# *Τέσσερα λυμένα παραδείγματα*

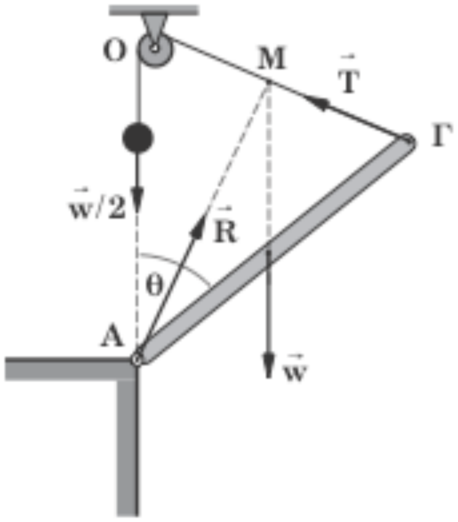
*Παράδειγμα 1ο*

**Ομογενής ράβδος ΑΓ, βάρους $\vec{w}$ και μήκους L, είναι αρθρωμένη στο ένα άκρο της Α, όπως φαίνεται στο σχήμα (8), ενώ το άλλο άκρο της είναι δεμένο σε νήμα που διέρχεται από μικρή ακίνητη τροχαλία Ο, η οποία βρίσκεται πάνω στην κατακό ρυφη διεύθυνση που διέρχεται από το σημείο Α της ράβδου και βρίσκεται σε απόσταση L πάνω από αυτό. Στο ελεύθερο άκρο του νήματος δένεται σφαιρίδιο βάρους $\vec{w}'=\vec{w}/2$.**

**i) Να καθορίσετε την τιμή της γωνίας θ, για την οποία η ράβδος ΑΓ ισορροπεί.**

**ii) Να καθορίσετε το είδος της ισορροπίας της ράβδου.**

<u>**ΛΥΣΗ**</u>: **i)** Επί της ράβδου ΑΓ ενεργεί το βάρος της $\vec{\mathbf{w}}$, η δύναμη $\vec{\mathbf{T}}$ από το νήμα, κατά μέτρο ίση με το βάρος $\vec{\mathbf{w}}'$ του σφαιριδίου και τέλος η δύναμη $\vec{\mathbf{R}}$ από την άρθρωση Α. Λόγω της ισορροπίας της ράβδου πρέπει οι φορείς των τριών αυτών δυνάμεων να διέρχονται από το ίδιο σημείο, που στην περίπτωσή μας είναι το μέσον Μ του νήματος ΟΓ. Όμως το τρίγωνο ΟΑΓ είναι ισοσκελές, οπότε η διάμεσός του ΑΜ θα είναι διχοτόμος και ύψος αυτού. Εξάλλου, πρέπει το άθροισμα των ροπών όλων των δυνάμεων που δέχεται η ράβδος ΑΓ, περί το άκρο της Α, να είναι μηδέν, δηλαδή πρέπει να ισχύει:




**Σχήμα 8**

$$\mathbf{w(L/2)\eta\mu\theta - T(AM) = 0 \;\Rightarrow\; w(L/2)\eta\mu\theta = w'L\sigma\upsilon\nu(\theta/2) \;\Rightarrow}$$

$$\mathbf{2w'\eta\mu(\theta/2)\sigma\upsilon\nu(\theta/2) = w'\sigma\upsilon\nu(\theta/2) \;\Rightarrow}$$

$$\mathbf{\eta\mu(\theta/2) = 1/2 \;\Rightarrow\; \theta/2 = \pi/6 \;\Rightarrow\; \theta = \pi/3}$$

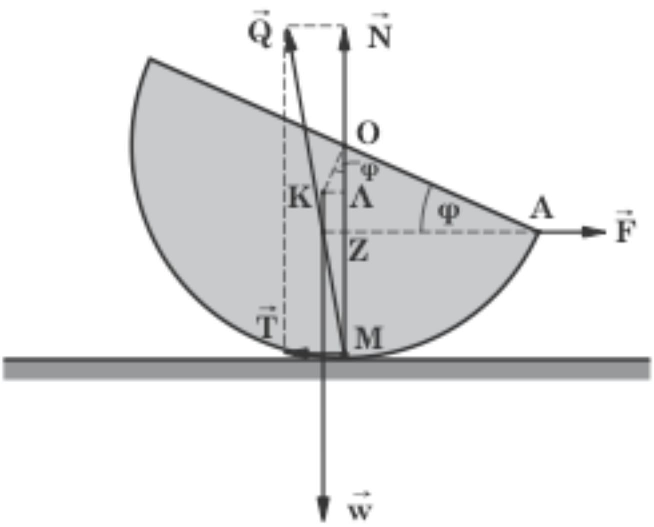
**ii)** Έστω ότι η ράβδος ΑΓ απομακρύνεται από την θέση ισορροπίας της, ώστε η γωνία θ να αυξάνεται. Τότε η ροπή του βάρους $\vec{\mathbf{w}}$ της ράβδου, περί το άκρο Α, αυξάνεται ενώ η ροπή της τάσεως $\vec{\mathbf{T}}$ του νήματος ελαττώνεται, δηλαδή δημιουργείται συνισταμένη ροπή επί της ράβδου που τείνει να την απομακρύνει ακόμη περισσότερο από την θέση ισορροπίας της. Ας υποθέσουμε ακόμη ότι η ράβδος ΑΓ απομακρύνεται από την θέση ισορροπίας της, ώστε η γωνία θ να ελαττώνεται. Τότε η ροπή της $\vec{\mathbf{T}}$ περί το άκρο Α αυξάνεται, ενώ η ροπή του βάρους $\vec{\mathbf{w}}$ περί το ίδιο σημείο ελαττώνεται, δηλαδή δημιουργείται πάλι επί της ράβδου συνισταμένη ροπή, η οποία τείνει να την απομακρύνει ακόμη περισσότερο από την θέση ισορροπίας της. Με βάση τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι, η ισορροπία της ράβδου είναι ασταθής.

**P.M. fysikos**

*Παράδειγμα* 2ο **Ημικυκλική πλάκα, βάρους $\vec{\mathbf{w}}$ και ακτίνας R, στηρίζεται σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή οριακής τριβής n. Στο άκρο Α της πλάκας εφαρμόζεται οριζόν**

**τια δύναμη, τέτοια ώστε το επίπεδο της πλάκας να διατηρείται κατακόρυφο και η πάνω πλευρά της να παρουσιάζει κλίση φ ως προς την οριζόντια διεύθυνση (σχ. 9). Εάν το κέντρο μάζας της πλάκας απέχει από την πάνω πλευρά της απόσταση 4R/3π, να βρείτε την τιμή της γωνίας φ, για την οποία επίκειται η ολίσθηση της πλάκας στο οριζόντιο επίπεδο καθώς και το μέτρο της οριζόντι ας δύναμης.**

**<u>ΛΥΣΗ</u>:** Στην ημικυκλική πλάκα ενεργεί το βάρος της $\vec{w}$, του οποίου ο φορέας διέρχεται από το κέντρο μάζας Κ της πλάκας, η οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ και η πλάγια αντίδραση $\vec{Q}$ του οριζοντίου επιπέδου, η οποία αναλύεται στην στατική τριβή $\vec{T}$ και στην κάθετη αντίδραση $\vec{N}$. Όταν επίκειται η ολίσθηση της πλάκας πάνω στο οριζόντιο επίπεδο, αυτή ισορροπεί οριακά, οπότε οι φο




**Σχήμα 9**

ρείς των δυνάμεων $\vec{w}$, $\vec{F}$ και $\vec{Q}$ διέρχονται από το ίδιο σημείο, η δε τριβή $\vec{T}$ είναι οριακή τριβή, και το μέτρο της θα ικανοποιεί την σχέση:

$$\mathbf{T = nN} \qquad (1)$$

Όμως, λόγω της ισορροπίας της πλάκας η συνισταμένη των οριζόντιων δυνά μεων που δέχεται, καθώς και η συνισταμένη των κατακόρυφων δυνάμεων είναι ίση με μηδέν, δηλαδή θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left.\begin{matrix}\mathbf{F - T = 0}\\ \mathbf{N - w = 0}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\mathbf{F = T}\\ \mathbf{N = w}\end{matrix}\right\} \qquad (2)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\mathbf{F = nw} \qquad (3)$$

Εξάλλου, το άθροισμα των ροπών όλων των δυνάμεων που δέχεται η πλάκα, περί το σημείο επαφής της Μ με το οριζόντιο έδαφος, είναι ίσο με μηδέν, δη λαδή ισχύει:

$$\mathbf{F(ZM) - w(K\Lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(R - R\eta\mu\varphi) = w(OK)\eta\mu\varphi \quad \Rightarrow}$$
$$\mathbf{FR(1 - \eta\mu\varphi) = w\eta\mu\varphi(4R/3\pi) \quad \Rightarrow \quad F = 4w\eta\mu\varphi /3\pi(1 - \eta\mu\varphi)} \qquad (4)$$

Από (3) και (4) έχουμε την σχέση:

$$\mathbf{4w\eta\mu\varphi /3\pi(1 - \eta\mu\varphi) = nw \quad \Rightarrow \quad 4\eta\mu\varphi = 3\pi n(1 - \eta\mu\varphi) \quad \Rightarrow}$$

$$\mathbf{4\eta\mu\varphi + 3\pi n\eta\mu\varphi = 3\pi n \quad \Rightarrow \quad \eta\mu\varphi = \frac{3\pi n}{3\pi n + 4}} \qquad (5)$$

Τέλος, σύμφωνα με την σχέση (3), όταν επίκειται η ολίσθηση της πλάκας πά νω στο οριζόντιο επίπεδο το μέτρο της δύναμης $\vec{\mathbf{F}}$ είναι ίσο με nw.

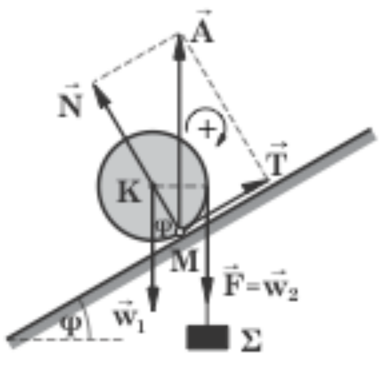
**P.M. fysikos**

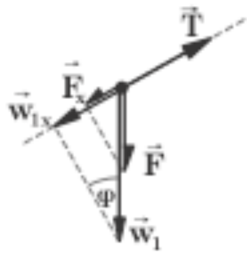
*Παράδειγμα 3ο* **Ο λαιμός μιας τροχαλίας μάζας $m_1$, εφάπτεται ενός κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσεως φ. Στο αυλάκι του λαιμού έχει περιτυλιχθεί νήμα, στο ελεύθερο άκρο του οποίου έχει στερεωθεί μικρό σώμα μάζας $m_2$ όπως φαίνεται στο σχήμα (10).**

**i) Να βρεθεί η σχέση μεταξύ των μεγεθών $m_1$, $m_2$ και φ, ώστε το σύστημα τροχαλίας-σώματος να ισορροπεί.**

**ii) Εξετάσατε το είδος της ισορροπίας του συστήματος. Να δεχθείτε ότι, η τροχαλία μπορεί μόνο να κυλίεται κατά μήκος του κεκλιμέ νου επιπέδου.**

<u>**ΛΥΣΗ**</u>: **i)** Επί της τροχαλίας ενεργεί το βάρος της $\vec{\mathbf{w}}_1$, του οποίου ο φορέας διέρχεται από το κέντρο μάζας Κ της τροχαλίας, η τάση $\vec{\mathbf{F}}$ του κατακόρυφου νήματος που περιβάλλει τον λαιμό της τροχαλίας, της οποίας ο φορέας εφάπ τεται της τροχαλίας και η οποία είναι ίση με το βάρος $\vec{\mathbf{w}}_2$ του σώματος.




**Σχήμα 10** **Σχήμα 11**

Τέλος επί της τροχαλίας ενεργεί η αντίδραση $\vec{\mathbf{A}}$ του κεκλιμένου επιπέδου, η οποία αναλύεται στην κάθετη αντίδραση $\vec{\mathbf{N}}$ και στην στατική τριβή $\vec{\mathbf{T}}$. Λόγω της ισορροπίας της τροχαλίας, το άθροισμα των ροπών των δυνάμεων αυτών, περί το κέντρο μάζας Κ θα είναι μηδέν, δηλαδή θα ισχύει η σχέση:

$$\mathbf{FR - TR = 0 \;\Rightarrow\; F = T \;\Rightarrow\; w_2 = T} \qquad (1)$$

Επίσης η συνισταμένη των δυνάμεων που ενεργούν επί της τροχαλίας κατά την διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου είναι μηδέν, δηλαδή ισχύει:

$$\mathbf{w_1\eta\mu\varphi + F\eta\mu\varphi = T \;\overset{(1)}{\Rightarrow}\; (w_1 + w_2)\eta\mu\varphi = w_2 \;\Rightarrow}$$

$$\mathbf{\eta\mu\varphi = \frac{w_2}{w_1 + w_2} = \frac{m_2 g}{m_1 g + m_2 g} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}} \qquad (2)$$

**ii)** Υποθέτουμε ότι, η τροχαλία εκτρέπεται λίγο από την θέση ισορροπίας της ώστε να κυλιθεί προς τα κάτω. Κατά την στοιχειώδη αυτή μετατόπιση της τροχαλίας η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος τροχαλία-σώμα μεταβάλλεται κατά ΔU και ισχύει:

$$\mathbf{\Delta U = \Delta U_{\sigma\omega\mu.} + \Delta U_{\tau\rho o\chi.}} \qquad (3)$$

Όμως η μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας της τροχαλίας είναι:

$$\mathbf{\Delta U_{\tau\rho o\chi.} = -m_1 g \Delta s \eta\mu\varphi} \qquad (4)$$

όπου Δs η στοιχειώδης προς τα κάτω μετατόπιση του κέντρου μάζας της τροχαλίας. Εξάλλου η αντίστοιχη μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέρ γειας του σώματος είναι:

$$\mathbf{\Delta U_{\sigma\omega\mu.} = -m_2 g \Delta s \eta\mu\varphi + m_2 g \Delta s} \qquad (5)$$

όπου ο όρος $-m_2g\Delta s\eta\mu\varphi$ αναφέρεται στην μεταβολή της βαρυτικής δυναμι κής ενέργειας της μάζας $m_2$, λόγω της μεταφορικής κίνησης της τροχαλίας, ενώ ο όρος $m_2g\Delta s$ οφείλεται σε μεταβολή της βαρυτικής της ενέργειας, λόγω της περιστροφής της τροχαλίας. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3), (4) και (5) παίρνουμε την σχέση:

$$\mathbf{\Delta U = -m_1 g \Delta s \eta\mu\varphi - m_2 g \Delta s \eta\mu\varphi + m_2 g \Delta s \;\Rightarrow}$$

$$\mathbf{\Delta U = g\Delta s[m_2 - (m_1 + m_2)\eta\mu\varphi] \;\overset{(2)}{\Rightarrow}}$$

$$\mathbf{\Delta U = g\Delta s\left[m_2 - (m_1 + m_2)\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right] = 0}$$

Δηλαδή κατά την στοιχειώδη μετατόπιση του συστήματος από την θέση ισορ ροπίας του, η βαρυτική του δυναμική ενέργεια δεν μεταβλήθηκε, γεγονός που σημαίνει ότι η ισορροπία του είναι αδιάφορη.

**P.M. fysikos**

*Παραδειγμα 4ο* **Στις άκρες αβαρούς και λεπτής ράβδου μήκους 2L, έχουν στερεωθεί δύο μικρά σφαιρίδια της ίδιας μάζας m και το σύστημα μπορεί να στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ περί κατακόρυφο άξονα ΟΖ που διέρχεται από το μέσο Ο της ράβδου και σχηματίζει γωνία φ με αυτήν.**

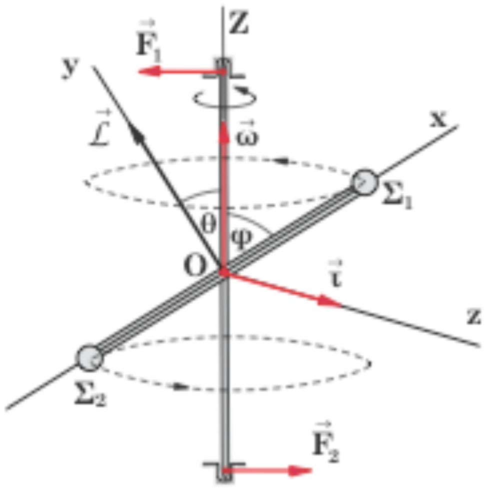
**i) Να δείξετε ότι η στροφορμή $\vec{\mathcal{L}}_{(O)}$ του συστήματος περί το Ο και η κινητική του ενέργεια K ικανοποιούν την σχέση:**

$$(\vec{\mathcal{L}}_{(O)}\cdot\vec{\omega})=2K$$

**ii) Να βρείτε τις οριζόντιες συνιστώσες των δυνάμεων που δέχεται ο άξονας περιστροφής από τα έδρανα στήριξής του. Δίνεται η απόσταση α των εδράνων.**

<u>**ΛΥΣΗ:**</u> **i)** Θεωρούμε τρισορθογώνιο σύστημα Oxyz κύριων αξόνων αδράνειας του συστήματος ράβδος-σφαιρίδια ακλόνητα συνδεδεμένο με αυτό, του οποίου ο άξονας Ox συμπίπτει με την ράβδο, ο άξονας Oy ανήκει στο επίπεδο που καθορίζει η ράβδος και ο άξονας περιστροφής, ενώ ο άξονας Oz είναι κάθετος στο επίπεδο αυτό (σχ. 12). Οι προβολές $\omega_x$, $\omega_y$, $\omega_z$ της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$ στους άξονες αυτούς είναι:

$$\omega_x=\omega\sigma\upsilon\nu\varphi\ ,\ \omega_y=\omega\eta\mu\varphi\ ,\ \omega_z=0 \qquad (1)$$




**Σχήμα 12**

Εάν $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων Ox, Oy, Oz αντιστοίχως, θα έχουμε:

$$\vec{\omega} = \omega_x\vec{e}_x + \omega_y\vec{e}_y + \omega_z\vec{e}_z \overset{(1)}{\Rightarrow} \vec{\omega} = \omega\sigma\upsilon\nu\varphi\,\vec{e}_x + \omega\eta\mu\varphi\,\vec{e}_y \qquad (2)$$

Η στροφορμή $\vec{\mathcal{L}}_{(O)}$ του συστήματος περί το O, δίνεται από την σχέση:

$$\vec{\mathcal{L}}_{(O)}=I_x\omega_x\vec{e}_x+I_y\omega_y\vec{e}_y+I_z\omega_z\vec{e}_z \Rightarrow \vec{\mathcal{L}}_{(O)}=I_x\omega\sigma\upsilon\nu\varphi\,\vec{e}_x+I_y\omega\eta\mu\varphi\,\vec{e}_y \qquad (3)$$

όπου $I_x$, $I_y$, $I_z$ οι ροπές αδράνειας του συστήματος ως προς τους κύριους άξονες Ox, Oy, Oz αντιστοίχως, για τις οποίες ισχύει:

$$I_x = 0 \ , \ I_y = I_z = 2mL^2$$

Έτσι η σχέση (3) παίρνει την μορφή:

$$\vec{\mathcal{L}}_{(O)}=2mL^2\omega\eta\mu\varphi\,\vec{e}_y \qquad (4)$$

Από την (4) προκύπτει ότι η στροφορμή δεν είναι συγγραμμική με την γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$, αλλά σχηματίζει με αυτήν γωνία θ=π/2-φ. Για το εσω τερικό γινόμενο $(\vec{\mathcal{L}}_{(O)}\cdot\vec{\omega})$ έχουμε, σύμφωνα με τις (2) και (4) την σχέση:

$$(\vec{\mathcal{L}}_{(O)}\cdot\vec{\omega})=2mL^2\omega\eta\mu\varphi\,\omega\eta\mu\varphi=2mL^2\omega^2\eta\mu^2\varphi \qquad (5)$$

Εξάλλου η κινητική ενέργεια K του σύστήματος είναι:

$$K = \frac{I_x\omega_x^2}{2} + \frac{I_y\omega_y^2}{2} + \frac{I_z\omega_z^2}{2} \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$K = \frac{I_y\omega_y^2}{2} = \frac{2mL^2}{2}\omega^2\eta\mu^2\varphi = mL^2\omega^2\eta\mu^2\varphi \qquad (6)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5) και (6) παίρνουμε την αποδεικτέα σχέση:

$$(\vec{\mathcal{L}}_{(O)}\cdot\vec{\omega})=2K \qquad (7)$$

**ii)** Επειδή το κέντρο μάζας O του συστήματος είναι ακίνητο, σύμφωνα με το θεώρημα κίνησης του κέντρου μάζας οι οριζόντιες συνιστώσες $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ των δυνάμεων που δέχεται ο άξονας περιστροφής από τα έδρανα στήριξής του πρέπει να αποτελούν ζεύγος δυνάμεων του οποίου η ροπή $\vec{\tau}$ είναι:

$$\vec{\tau}=\frac{d\vec{\mathcal{L}}_{(O)}}{dt}=\left[\frac{d\vec{\mathcal{L}}_{(O)}}{dt}\right]_\sigma+\left(\vec{\omega}\times\vec{\mathcal{L}}_{(O)}\right)_\sigma \qquad (8)$$

όπου $d\vec{\mathcal{L}}_{(O)}/dt$ ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής θεωρούμενος σ' ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς (λογουχάρη στο σύστημα αναφοράς του εδά φους) και $(d\vec{\mathcal{L}}_{(O)}/dt)_\sigma$ ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής θεω ρούμενος στο στρεφόμενο (μη αδρανεικό) σύστημα αναφοράς Oxyz. Όμως σύμφωνα με την σχέση (4) ο ρυθμός αυτός είναι μηδέν, οπότε η (8) γράφεται:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}=(\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\mathcal{L}}_{(O)})_\sigma \overset{(2),(4)}{\Rightarrow} \vec{\boldsymbol{\tau}}=\left[\left(\boldsymbol{\omega\sigma\upsilon\nu\varphi}\,\vec{\mathbf{e}}_x+\boldsymbol{\omega\eta\mu\varphi}\,\vec{\mathbf{e}}_y\right)\times(\mathbf{2mL^2}\boldsymbol{\omega\eta\mu\varphi}\,\vec{\mathbf{e}}_y)\right]\Rightarrow$$

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}=\mathbf{2mL^2}\boldsymbol{\omega^2\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi}(\vec{\mathbf{e}}_x\times\vec{\mathbf{e}}_y)\;\Rightarrow\;\vec{\boldsymbol{\tau}}=\mathbf{mL^2}\boldsymbol{\omega^2\eta\mu}\mathbf{2}\boldsymbol{\varphi}\,\vec{\mathbf{e}}_z \qquad (9)$$

Εάν F είναι το κοινό μέτρο των δυνάμεων $\vec{\mathbf{F}}_1$, $\vec{\mathbf{F}}_2$ η (9) γράφεται:

$$\mathbf{F}\boldsymbol{\alpha}\,\vec{\mathbf{e}}_z=\mathbf{mL^2}\boldsymbol{\omega^2\eta\mu}\mathbf{2}\boldsymbol{\varphi}\,\vec{\mathbf{e}}_z\;\Rightarrow\;\mathbf{F}=\mathbf{mL^2}\boldsymbol{\omega^2\eta\mu}\mathbf{2}\boldsymbol{\varphi}/\boldsymbol{\alpha}$$

**P.M. fysikos**