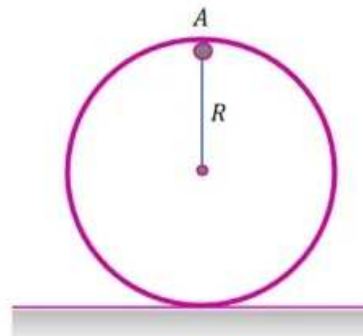


Η επιτάχυνση του κέντρου ομογενούς δακτυλίου

Ο δακτύλιος έχει μάζα M και ακτίνα R βρίσκεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ένα σημειακό σφαιρίδιο μάζας $m = M$ είναι στερεωμένο στο ψηλότερο σημείο και εσωτερικά του δακτυλίου. Αρχικά το σύστημα ισορροπεί. Δίνουμε μικρή ώθηση στο δακτύλιο ώστε το στερεό να κινηθεί. Βρείτε την επιτάχυνση του κέντρου O του δακτυλίου όταν η ακτίνα OA γίνει οριζόντια. Δίδεται το g



Απάντηση:

Στη διάρκεια της κίνησης από την αρχική θέση μέχρι τη θέση που η OA γίνεται οριζόντια οι δυνάμεις στο σύστημα είναι οριζόντιες και από ΑΔΟ στην οριζόντια διεύθυνση παίρνουμε:

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \rightarrow v_{Kx} = v_{cmx} = 0$$

Και από ΑΔΜΕ:

$$mgR = \frac{1}{2} 2m \cdot v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 \rightarrow$$

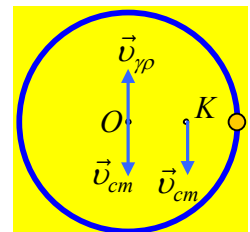
$$\text{Όπου } I_{cm} = I_K = \left(mR^2 + m \frac{R^2}{4} \right) + m \frac{R^2}{4} = \frac{3}{2} mR^2$$

Ενώ με βάση το σχήμα, $v_{cm} = \omega \cdot \frac{1}{2} R$ οπότε:

$$mgR = \frac{1}{2} 2m \cdot \frac{\omega^2 R^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{3mR^2}{2} \omega^2 \rightarrow mgR = mR^2 \omega^2 \rightarrow \omega^2 = \frac{g}{R}$$

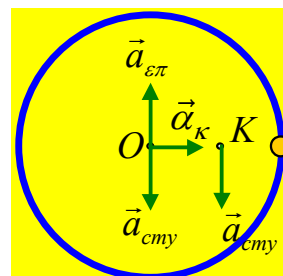
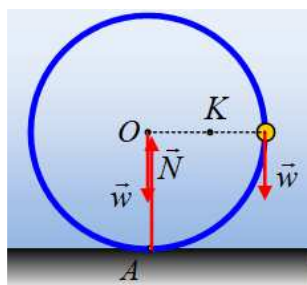
Αλλά τότε στη θέση αυτή το κέντρο O έχει κεντρομόλο επιτάχυνση:

$$\alpha_{κεντ} = \omega^2 \cdot \frac{R}{2} = \frac{g}{2}$$



Αυτή θα είναι τελικά και η επιτάχυνση του O . Γιατί; Ας συνεχίσουμε την δυναμική μελέτη:

Στο πρώτο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό S , ενώ K είναι το κέντρο μάζας του.



Έτσι θα έχουμε:

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_x = 0 \rightarrow a_{cmx} = 0$ (1)

$\Sigma F_y = ma_{cmy} \rightarrow 2mg - N = 2ma_{cmy}$ (2)

Περιστροφική κίνηση: $\Sigma \tau_K = I_K \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$

$$N \cdot \frac{R}{2} = \frac{3mR^2}{2} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$N = 3mR \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (3)$$

Στο δεύτερο από τα παραπάνω σχήματα, έχουν σχεδιαστεί οι αντίστοιχες επιταχύνσεις του άξονα O, όπου $\alpha_{\epsilon\pi} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot (OK) = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot r = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \frac{1}{2} R$, ενώ α_K η κεντρομόλος επιτάχυνσή του, εξαιτίας της κυκλικής του κίνησης γύρω από το κέντρο μάζας K.

Αλλά όμως το σημείο O δε θα επιταχυνθεί ούτε προς τα πάνω, ούτε προς τα κάτω οπότε:

$$\alpha_{\epsilon\pi} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \frac{1}{2} R \quad (4)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε:

$$2mg - 3mR \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} = m\alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R \rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} R = \frac{g}{2R} R = \frac{10}{2} m / s^2 = 5m / s^2.$$

dmargaris@gmail.com