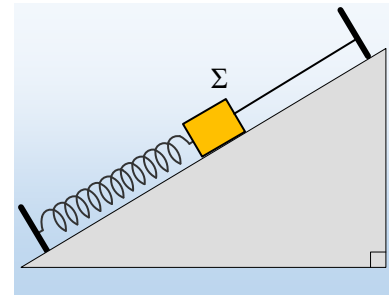
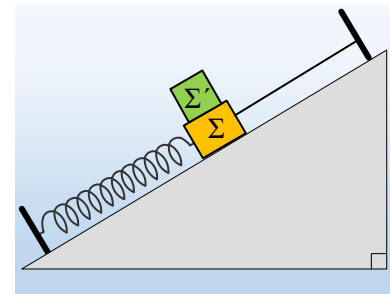


Κινδυνεύουμε να έχουμε ολίσθηση;

Ένα σώμα Σ μάζας $m=1\text{kg}$ ηρεμεί σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσεως $\theta=30^\circ$, δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου και στο άκρο νήματος, παράλληλου προς το επίπεδο, όπως στο σχήμα. Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα, οπότε το σώμα εκτελεί αατ, με αρχική επιτάχυνση μέτρου $|a_1|=10\text{m/s}^2$ ενώ ολοκληρώνει πέντε πλήρεις ταλαντώσεις σε χρονικό διάστημα $t_1=3,14\text{s}$.



- i) Να υπολογιστούν:
 - α) το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος Σ.
 - β) Η τάση T_1 του νήματος, πριν το κόψουμε.
 - γ) Η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου.
- ii) Επαναλαμβάνουμε το πείραμα, αλλά τώρα προσθέτουμε πάνω στο σώμα Σ, ένα δεύτερο σώμα Σ' με μάζα επίσης m , το οποίο ισορροπεί.
 - α) Να υπολογιστεί η τάση του νήματος T_2 .
 - β) Αν ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων είναι $\mu_s=0,8$, να εξετάσετε τι πρόκειται να συμβεί, αν κόψουμε το νήμα: Τα δυο σώματα θα ταλαντώνεται μαζί, ή θα υπάρξει ολίσθηση μεταξύ τους.



Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$, ενώ θεωρούνται γνωστοί οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας των $30^\circ!!!$

Απάντηση:

- i) Στο πάνω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ, όπου T_1 η τάση του νήματος, ενώ στο μεσαίο σχήμα, το ελατήριο έχει συσπειρωθεί κατά $\Delta\ell_2$ και είναι η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης μετά το κόψιμο του νήματος. Για την περίοδο ταλάντωσης έχουμε:

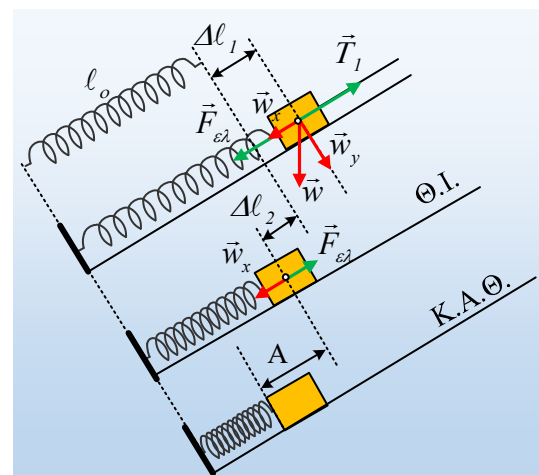
$$T = \frac{t_1}{N} = \frac{3,14\text{s}}{5} = 0,2\pi \text{ s}$$

Οπότε:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,2\pi} \text{ rad / s} = 10 \text{ rad / s} \text{ και}$$

$$D=k=m\omega^2=1\cdot 10^2\text{N/m}=100\text{N/m}$$

- α) Μόλις κόψουμε το νήμα, το σώμα ξεκινά την ταλάντωσή του από την ακραία θέση ταλάντωσης με επιτάχυνση a_1 , όπου $a_1=-\omega^2A$, αλλά τότε:



$$A = \frac{|\alpha_1|}{\omega^2} = \frac{10}{10^2} m = 0,1m$$

β) Για την θέση ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_{ελ} = w_x \rightarrow$$

$$k \cdot \Delta \ell_2 = mg \cdot \eta \mu \theta \rightarrow \Delta \ell_2 = \frac{mg \cdot \eta \mu \theta}{k} = \frac{1 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}}{100} m = 0,05m$$

Αλλά τότε, πριν κοπεί το νήμα το ελατήριο είχε επιμήκυνση $\Delta \ell_1$ όπου:

$$\Delta \ell_1 = A - \Delta \ell_2 = 0,1m - 0,05m = 0,05m$$

Οπότε, με βάση το πρώτο σχήμα:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow T = F_{ελ} + w_x = k \cdot \Delta \ell_1 + mg \eta \mu \theta = 100 \cdot 0,05 N + 1 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} N = 10 N$$

Ας δούμε και αυτό: Μόλις κοπεί το νήμα το σώμα επιταχύνεται προς τα κάτω και ισχύει:

$$|\Sigma F| = m |a_1| \rightarrow k \cdot \Delta \ell_1 + mg \eta \mu \theta = m |a_1| = 1 \cdot 10 N = 10 N = T_1$$

Αφού η τάση του νήματος ισορροπούσε τις δυο δυνάμεις, οι οποίες θα επιταχύνουν στη συνέχεια το σώμα.

γ) Με βάση το τρίτο σχήμα, η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου θα είναι ίση:

$$\Delta \ell_{max} = A + \Delta \ell_2 = 0,1m + 0,05m = 0,15m$$

ii) Αφού και τα δυο σώματα ισορροπούν, μπορούμε να τα θεωρήσουμε σαν ένα σώμα σε ισορροπία.

α) Αλλά τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\Sigma F = 0 \rightarrow T_2 = k \cdot \Delta \ell_1 + 2mg \eta \mu \theta = 100 \cdot 0,05 N + 2 \cdot 1 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} N = 15 N$$

β) Θεωρώντας ότι τα δυο σώματα κινούνται μαζί, σαν ένα σύστημα, για την θέση ισορροπίας του συστήματος αυτού, θα ισχύει, κατά αναλογία με το i) β):

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F'_{ελ} = w_{ολ,x} \rightarrow$$

$$k \cdot \Delta \ell_3 = 2mg \cdot \eta \mu \theta \rightarrow \Delta \ell_3 = \frac{2mg \cdot \eta \mu \theta}{k} = \frac{2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}}{100} m = 0,1m$$

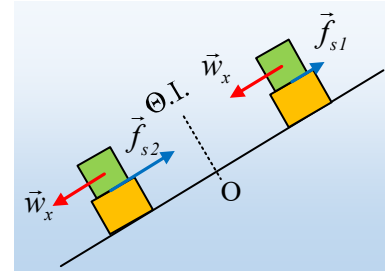
Αλλά τότε το νέο πλάτος ταλάντωσης A_1 , θα είναι ίσο:

$$A_1 = \Delta \ell_1 + \Delta \ell_3 = 0,05m + 0,1m = 0,15m$$

β) Στο σώμα Σ_1 , στη διεύθυνση της κίνησης ασκούνται δύο δυνάμεις. Η συνιστώσα του βάρους w_x και η δύναμη στατικής τριβής. Η συνισταμένη τους, πρέπει να κατευθύνεται προς την θέση ισορροπίας O , αφού θα είναι μια δύναμη επαναφοράς με τιμή $\Sigma F = m \cdot a$ και αφού η επιτάχυνση κατευθύνεται προς το O , την ίδια κατεύθυνση θα έχει και η συνισταμένη δύναμη. Αλλά τότε σε θέσεις πάνω από το O η

στατική τριβή θα έχει μικρότερο μέτρο (κάποια στιγμή θα αλλάξει και κατεύθυνση...) από το μέτρο της σε θέσεις κάτω από την θέση ισορροπίας.

Αλλά τότε για να μην έχουμε ολίσθηση πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι το μεγαλύτερο μέτρο της, θα είναι μικρότερο ή ίσο με την οριακή στατική τριβή. Όμως για το μέτρο της, κάτω από την θέση O, θα έχουμε:



$$f_{s2} - mg \cdot \eta\mu\theta = m|a| \rightarrow f_{s2} = mg \cdot \eta\mu\theta + m|\omega_l^2 x| \rightarrow f_{s2,max} = mg \cdot \eta\mu\theta + m \frac{k}{2m} A_l \rightarrow$$

$$f_{s2,max} = 1 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} N + \frac{100}{2} 0,15 N = 12,5 N$$

Εξάλλου για το μέτρο της οριακής στατικής τριβής, η οποία μπορεί να ασκηθεί στο Σ_1 , θα έχουμε:

$$T_{l,op} = \mu_s N_l = \mu_s mg \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 0,8 \cdot 1 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} N = 4\sqrt{3} N \approx 6,9 N$$

Βλέπουμε ότι η στατική τριβή που απαιτείται για να μην έχουμε ολίσθηση, είναι πολύ μεγαλύτερη από την τριβή που μπορεί να αναπτυχθεί, συνεπώς πολύ πριν το σώμα Σ_1 , φτάσει στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης, θα έχει ολισθήσει.

dmargaris@gmail.com