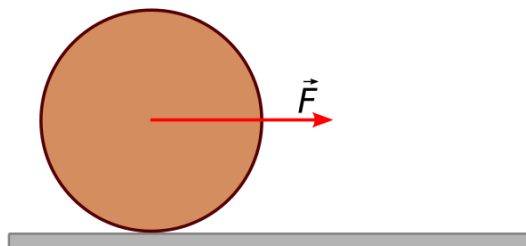


Το σημείο μηδενισμού της επιτάχυνσης

Ένας ομογενής τροχός μάζας $M = 2\text{ kg}$ και ακτίνας $R = 1\text{ m}$, βρίσκεται ακίνητος πάνω σε οριζόντιο δάπεδο. Κάποια χρονική στιγμή που θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των χρόνων $t = 0$, ασκούμε στο κέντρο του τροχού μία οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 3\sqrt{3}\text{ N}$ όπως στο σχήμα και ο τροχός αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$.

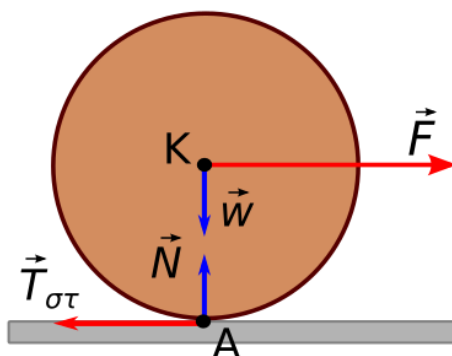


- A. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του τροχού.
- B. Να αποδείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$ υπάρχει κάποιο σημείο του τροχού με μηδενική (συνολική) επιτάχυνση.
- Γ. Να προσδιορίσετε το σημείο του τροχού που τη χρονική στιγμή $t = 1\text{ s}$ έχει μηδενική επιτάχυνση.

Λύση

A. Επειδή ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο ακίνητο έδαφος, συμπεραίνουμε ότι εκτελεί μία σύνθετη κίνηση. Τόσο η μεταφορική “συνιστώσα” της κίνησής του είναι ομαλά επιταχυνόμενη, όσο και η αντίστοιχη περιστροφική.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον τροχό φαίνονται στο σχήμα, όπου $\vec{w}$ το βάρος του, $\vec{N}$ η κάθετη αντίδραση από το δάπεδο και $\vec{T}_{στ}$ η στατική τριβή από το δάπεδο (η τριβή στην περίπτωση αυτή είναι αναγκαία και εμφανίζεται ως στατική, καθώς δεν παρατηρείται σχετική κίνηση μεταξύ του κατώτερου σημείου του τροχού και του εδάφους).



Επειδή το δάπεδο είναι ακίνητο και ο τροχός δεν ολισθαίνει, κάθε χρονική στιγμή θα πρέπει το κατώτερο σημείο του να έχει μηδενική ταχύτητα. Επομένως, η επιτάχυνση του κατώτερου σημείου στην παράλληλη με το δάπεδο διεύθυνση, θα πρέπει να είναι μηδενική (δεν είναι πάντοτε μηδενική η επιτάχυνση του κατώτερου σημείου, καθώς έχει και κεντρομόλο επιτάχυνση). Έτσι αντιλαμβανόμαστε τη φορά της στατικής τριβής, ώστε να δημιουργεί κατάλληλη γωνιακή επιτάχυνση (δεν υπάρχει άλλη δύναμη που δημιουργεί ροπή ως προς το κέντρο του τροχού) με αποτέλεσμα η επιτροχία

επιτάχυνση του κατώτερου σημείου A να είναι κάθε στιγμή αντίρροπη της επιτάχυνσής του λόγω μεταφορικής κίνησης ($\vec{a}_{cm}$). Επειδή όμως πρέπει τα δύο αυτά διανύσματα να είναι αντίθετα, αντιλαμβανόμαστε ότι τα μέτρα τους πρέπει να είναι ίσα. Οπότε, προκύπτει ο σύνδεσμος:

$$a_{cm} = a_{\varepsilon\pi,A} \Rightarrow a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} R \quad (1)$$

Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής τόσο για την μεταφορική κίνηση, όσο και για την περιστροφική κίνηση του τροχού, έχουμε:

$$\Sigma F = Ma_{cm} \Rightarrow F - T_{\sigma\tau} = Ma_{cm} \quad (2)$$

και

$$\Sigma \tau_K = I_{cm} a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_{\sigma\tau} R = \frac{1}{2} MR^2 a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2} MR a_{\gamma\omega\nu} \quad (3)$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, προκύπτει ότι

$$(3) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2} Ma_{cm} \quad (4)$$

και

$$(2) \stackrel{(4)}{\Rightarrow} F - \frac{1}{2} Ma_{cm} = Ma_{cm} \Rightarrow \boxed{a_{cm} = \frac{2F}{3M}} \Rightarrow \\ \Rightarrow a_{cm} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{3}}{3 \cdot 2} m/s^2 = \sqrt{3} m/s^2$$

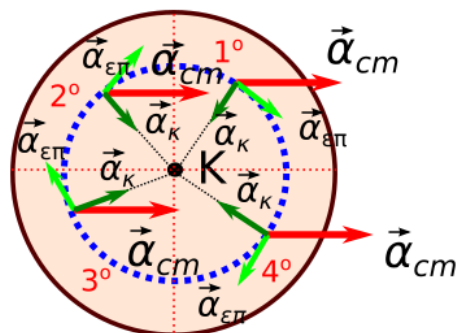
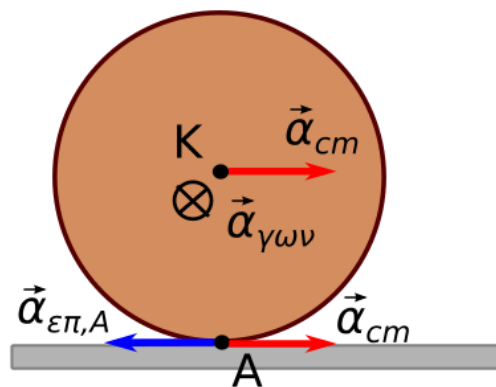
B. Η επιτάχυνση $\vec{a}$ κάθε σημείου του τροχού, προκύπτει από τη διανυσματική πρόσθεση

$$\vec{a} = \vec{a}_{cm} + \vec{a}_{\varepsilon\pi} + \vec{a}_\kappa$$

των αντίστοιχων συνιστωσών επιταχύνσεων του, όπου οι $\vec{a}_{\varepsilon\pi}$ και $\vec{a}_\kappa$ του κάθε σημείου είναι μεταξύ τους κάθετα διανύσματα. Έτσι, για να είναι μηδενική η επιτάχυνση κάποιου σημείου του τροχού αντιλαμβανόμαστε ότι πρέπει

$$(\vec{a}_{\varepsilon\pi} + \vec{a}_\kappa) = \vec{a}_{\pi\epsilon\rho} = -\vec{a}_{cm}$$

Δηλαδή, η συνισταμένη των κάθετων διανυσμάτων $\vec{a}_{\varepsilon\pi}$ και $\vec{a}_\kappa$ (πρόκειται για την επιτάχυνση που αντιστοιχεί στην περιστροφική κίνηση του τροχού) να είναι αντίρροπη της επιτάχυνσης λόγω μεταφορικής κίνησης του τροχού και ίσου μέτρου με αυτή.



Χωρίζοντας τον τροχό σε τέσσερα τεταρτημόρια όπως στο σχήμα, αντιλαμβανόμαστε ότι τα παραπάνω, εάν συμβαίνουν, θα ικανοποιούνται μόνο από σημεία του 4^{ου} τεταρτημορίου.

Εάν ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του τροχού και r η απόσταση του τυχαίου σημείου του τροχού από το κέντρο του Κ, ισχύει ότι

$$|\vec{a}_{\varepsilon\pi} + \vec{a}_\kappa| = \sqrt{(a_{\gamma\omega\nu}r)^2 + (\omega^2 r)^2} = r\sqrt{a_{\gamma\omega\nu}^2 + \omega^4}$$

Επομένως, για να είναι μηδενική η επιτάχυνση αυτού του (τυχαίου) σημείου, θα πρέπει

$$\begin{aligned} |\vec{a}_{\pi\varepsilon\rho}| = |\vec{a}_{\varepsilon\pi} + \vec{a}_\kappa| &= a_{cm} \Rightarrow r\sqrt{a_{\gamma\omega\nu}^2 + \omega^4} = a_{cm} \Rightarrow \\ \Rightarrow r &= \frac{a_{cm}}{\sqrt{a_{\gamma\omega\nu}^2 + \omega^4}} = \frac{a_{cm}}{\sqrt{a_{\gamma\omega\nu}^2 + a_{\gamma\omega\nu}^4 t^4}} \Rightarrow \\ \Rightarrow r &= \frac{a_{cm}}{a_{\gamma\omega\nu}\sqrt{1 + a_{\gamma\omega\nu}^2 t^4}} \Rightarrow \boxed{r = \frac{R}{\sqrt{1 + a_{\gamma\omega\nu}^2 t^4}}} \quad (5) \end{aligned}$$

Όπου έγινε χρήση της σχέσης (1) και του γεγονότος ότι η περιστροφική κίνηση του τροχού είναι ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική γωνιακή ταχύτητα. Δηλαδή, ισχύει η σχέση $\omega = a_{\gamma\omega\nu}t$.

Από την παραπάνω σχέση (5), προκύπτει ότι $0 < r \leq R$ με την ισότητα $r = R$ να ισχύει μόνο την $t = 0$. Επομένως, αντιλαμβανόμαστε ότι κάθε χρονική στιγμή υπάρχει κάποιο σημείο του τροχού με μηδενική (συνολικά) επιτάχυνση.

Γ. Θα προσδιορίσουμε τη θέση του συγκεκριμένου σημείου τότε, προσδιορίζοντας τόσο την απόστασή του από το κέντρο Κ του τροχού, όσο και την αντίστοιχη γωνία θ που σχηματίζει η επιβατική του ακτίνα με την κατακόρυφη ακτίνα ΚΑ του τροχού.

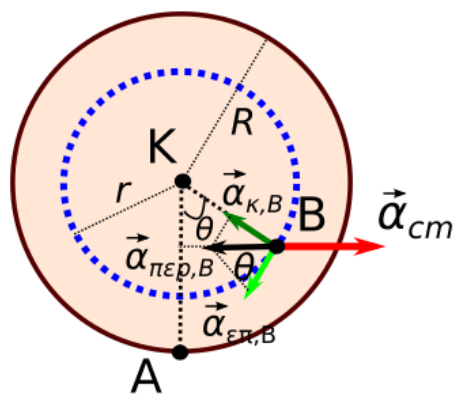
Με $a_{cm} = \sqrt{3}m/s^2$ η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού ισούται με

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{a_{cm}}{R} = \frac{\sqrt{3}}{1} rad/s^2 = \sqrt{3} rad/s^2$$

Από την σχέση (5) για $t = 1s$, προκύπτει ότι:

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 + 3 \cdot 1}} m = 0,5m$$

Με βάση το σχήμα, για το συνημίτονο της γωνίας θ έχουμε ότι:



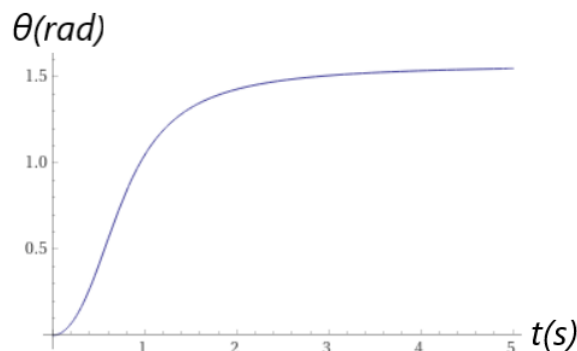
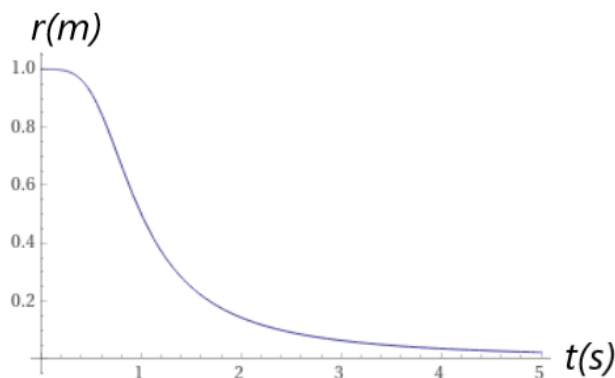
$$\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu\theta &= \frac{a_{\epsilon\pi,B}}{a_{\pi\epsilon\rho,B}} = \frac{a_{\gamma\omega\nu}r}{a_{cm}} = \frac{a_{\gamma\omega\nu}r}{a_{\gamma\omega\nu}R} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta &= \frac{r}{R} = \frac{0,5}{1} = 0,5 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} rad\end{aligned}$$

Έτσι, το ζητούμενο σημείο Β του τροχού που έχει τότε μηδενική επιτάχυνση, είναι σημείο του 4^{ου} τεταρτημορίου του, απέχει από το κέντρο του Κ απόσταση $r = \frac{R}{2} = 0,5m$ και η αντίστοιχη επιβατική του ακτίνα ΚΒ σχηματίζει γωνία $\theta = 60^\circ$ με την κατακόρυφο.

Σχόλιο για συναδέλφους: Παρακάτω δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $r = r(t) = \frac{R}{\sqrt{1+a_{\gamma\omega\nu}^2 t^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+3t^4}}$, $t \geq 0$, δηλαδή της σχέσης (5) και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\theta = \theta(t)$. Για την $\theta(t)$ έχουμε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{1+a_{\gamma\omega\nu}^2 t^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+3t^4}} \Rightarrow \theta = \sigma\upsilon\nu^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+3t^4}}\right), \quad t \geq 0$$

Παρατηρούμε ότι την $t = 0$ το σημείο μηδενισμού της επιτάχυνσης είναι το $(r, \theta) = (R, 0)$, δηλαδή το κατώτερο σημείο του τροχού, ενώ με την πάροδο του χρόνου αυτό τείνει να γίνει το κέντρο Κ του τροχού, καθώς $r \rightarrow 0$ και $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} rad$.



Μίλτος Καδιλτζόγλου

miltoskadiltzoglou@gmail.com