

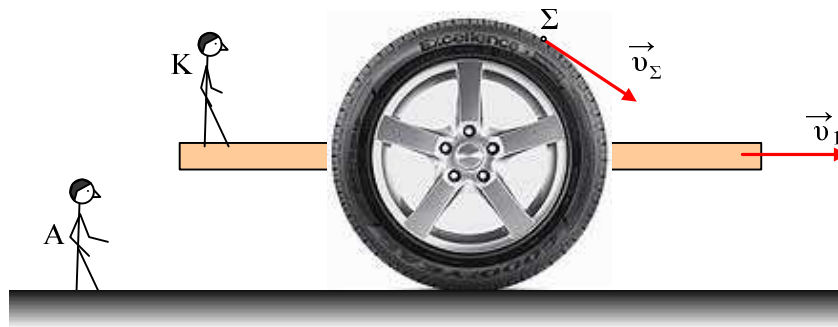
Μπερδέματα πάνω στην κεντρομόλο και επιτρόχια επιτάχυνση.

Τις προηγούμενες μέρες έγινε στο δίκτυο μια συζήτηση με θέμα «Πόση είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση;» Θεωρώ αναγκαίο να διατυπώσω με απλό τρόπο κάποια συμπεράσματα για όσους φίλους δεν την παρακολούθησαν, αλλά και για όλους που θα ήθελαν κάπως κωδικοποιημένα να κρατήσουν το συμπέρασμα.

Το ερώτημα είναι: Πόση επιτάχυνση έχει ένα σημείο Σ στην περιφέρεια ενός τροχού, όταν αυτός κυλίνεται χωρίς ολίσθηση;

Έστω λοιπόν ότι ο τροχός του παρακάτω σχήματος κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα κέντρου μάζας υ.

Ας παρακολουθήσουμε τι μετράνε δύο παρατηρητές. Ο ακίνητος Α επί του εδάφους και ο κινούμενος Κ, πάνω στο αυτοκίνητο.



Για τον κινούμενο παρατηρητή Κ το σημείο Σ έχει ταχύτητα $v_{\Sigma} = \omega R = v$, λόγω κυκλικής κίνησης.

Για τον παρατηρητή Α το σημείο Σ έχει ταχύτητα:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\Sigma} + \vec{v}_1$$

Οπότε παραγωγίζοντας παίρνουμε:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{\Sigma}}{dt} + \frac{d\vec{v}_1}{dt}$$

Δηλαδή η επιτάχυνση του σημείου Σ, ως προς τον παρατηρητή Α, είναι το διανυσματικό άθροισμα της επιτάχυνσης του Σ, όπως τη μετράει ο κινούμενος παρατηρητής Κ και της επιτάχυνσης του κινούμενου συστήματος (αυτοκινήτου), που εδώ όμως είναι μηδενική.

Άρα:

Οι δύο παρατηρητές μετρούν την ίδια επιτάχυνση για το σημείο Σ.

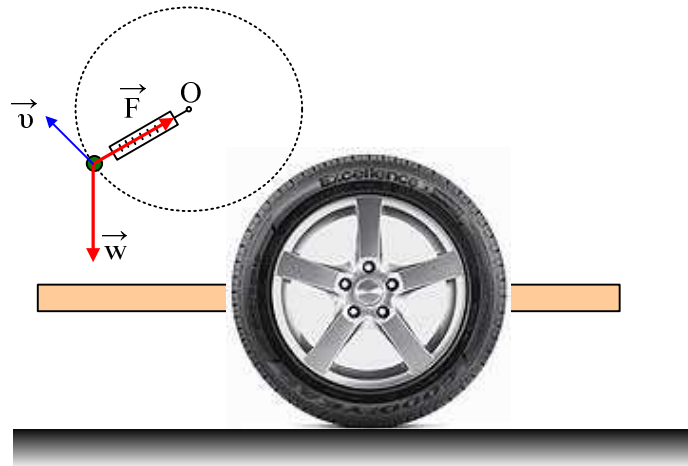
Μπορούμε δηλαδή να γράψουμε:

$$\alpha_{\Sigma A} = \alpha_{\Sigma K}$$

όπου οι δύο μετρούμενες επιταχύνσεις από τους παρατηρητές μας.

Να το πούμε με λίγο πιο Φυσικό τρόπο;

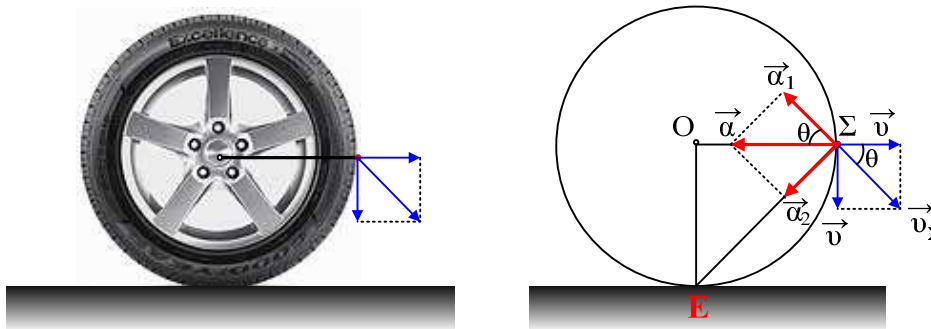
Έστω ότι ένα υλικό σημείο εκτελεί κατακόρυφη κυκλική τροχιά δεμένο στο άκρο νήματος, πάνω στο αυτοκίνητο, όπως στο παρακάτω σχήμα.



Και οι δύο παρατηρητές «βλέπουν» τις ίδιες δυνάμεις (βάρος και ένδειξη δυναμομέτρου), άρα υπολογίζουν και την ίδια επιτάχυνση για το υλικό σημείο.

Ας δούμε τώρα τι επιταχύνσεις «βλέπουν» οι παρατηρητές για ένα σημείο στην περιφέρεια του τροχού, σε κάποιες περιπτώσεις.

Έστω ότι η ακτίνα ΟΣ είναι οριζόντια όπως στο παρακάτω σχήμα.



Για τον κινούμενο παρατηρητή Κ:

Το σημείο Σ κάνει ομαλή κυκλική κίνηση με ταχύτητα $v_{\gamma\pi} = \omega \cdot R = v_{cm} = v$, έχοντας επιτάχυνση $\mathbf{a}$, η οποία κατευθύνεται προς το κέντρο Ο του κύκλου και η οποία μεταβάλλει τη διεύθυνση της ταχύτητάς του, είναι δηλαδή κεντρομόλος επιτάχυνση.

Δηλαδή ο Κ παρατηρητής λέει:

$$a_k = v^2/R.$$

Για τον ακίνητο παρατηρητή Α:

Το σημείο Σ έχει ταχύτητα $v_\Sigma = v\sqrt{2}$ η οποία σχηματίζει γωνία $\theta = 45^\circ$ με την οριζόντια διεύθυνση, η οποία προκύπτει σαν το διανυσματικό άθροισμα της οριζόντιας ταχύτητας του κέντρου μάζας v και της κατακόρυφης γραμμικής ταχύτητας $v_{\gamma\pi} = \omega \cdot R = v$, λόγω της κυκλικής κίνησης του σημείου Σ. Η επιτάχυνση είναι ΞΑΝΑ η $\mathbf{a}$, με φορά προς το κέντρο Ο, η οποία όμως δεν είναι κάθετη στην ταχύτητα.

Συνεπώς:

Αναλύοντας την επιτάχυνση, σε μια συνιστώσα a_1 στη διεύθυνση της ταχύτητας και σε μια a_2 κάθετη στην ταχύτητα, υποστηρίζει ότι:

- 1) Η κεντρομόλος επιτάχυνση του σημείου Σ είναι η a_2 με μέτρο:

$$a_2 = v_\Sigma^2 / R' = 2v^2 / R' \quad (1)$$

όπου R' η ακτίνα καμπυλότητας της (κυκλοειδούς) τροχιάς που διαγράφει το σημείο Σ και η οποία είναι υπεύθυνη για την αλλαγή στη διεύθυνση της ταχύτητας.

- 2) Η επιτρόχιος επιτάχυνση του σημείου Σ η οποία μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας, είναι η συνιστώσα a_1 .

Ας σημειωθούν εδώ τα εξής:

- Η επιτάχυνση a αναλύθηκε σε δύο ίσου μέτρου συνιστώσες a_1 , a_2 , αφού η γωνία που σχηματίζει η επιτάχυνση με τη διεύθυνση της a_1 (διεύθυνση της ταχύτητας είναι επίσης $\theta=45^\circ$).
- Η διεύθυνση της a_2 είναι κάθετη στην ταχύτητα του Σ, συνεπώς κατευθύνεται προς το σημείο E, επαφής του τροχού με το έδαφος.
- Από την σχέση (1) έχουμε:

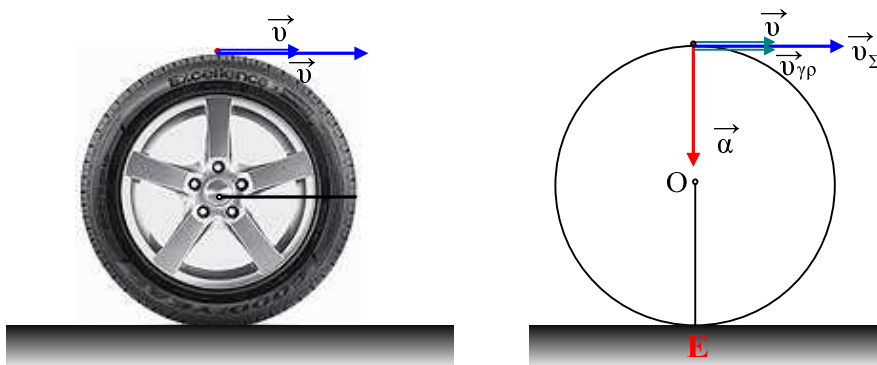
$$a_2 = 2v^2 / R' \quad \text{ή}$$

$$R' = \frac{2v^2}{a_2} = \frac{2v^2}{\frac{v^2}{R} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2}R \quad \text{ή}$$

$$R' = 2(\Sigma E)$$

Δηλαδή, μπορεί ο τροχός να εκτελεί περιστροφική κίνηση γύρω από στιγμιαίο άξονα περιστροφής που περνά από το σημείο E, μπορεί η κεντρομόλος επιτάχυνση που μετρά ο ακίνητος παρατηρητής να κατευθύνεται προς το E, αλλά το κέντρο της (κυκλοειδούς) τροχιάς του σημείου Σ δεν είναι το E, αλλά το συμμετρικό ως προς το E, του σημείου Σ.

Ας πάρουμε τώρα το σημείο Σ, στην κατακόρυφη που περνά από το κέντρο O, στο ψηλότερο σημείο.



Για τον κινούμενο παρατηρητή Κ:

Το σημείο Σ κάνει ομαλή κυκλική κίνηση με ταχύτητα $v_{\gamma\rho} = \omega \cdot R = v_{cm} = v$, έχοντας επιτάχυνση α , η οποία κατευθύνεται προς το κέντρο Ο του κύκλου και η οποία μεταβάλλει τη διεύθυνση της ταχύτητάς του, είναι δηλαδή κεντρομόλος επιτάχυνση.

Δηλαδή ο Κ παρατηρητής λέει:

$$\alpha_k = v^2/R.$$

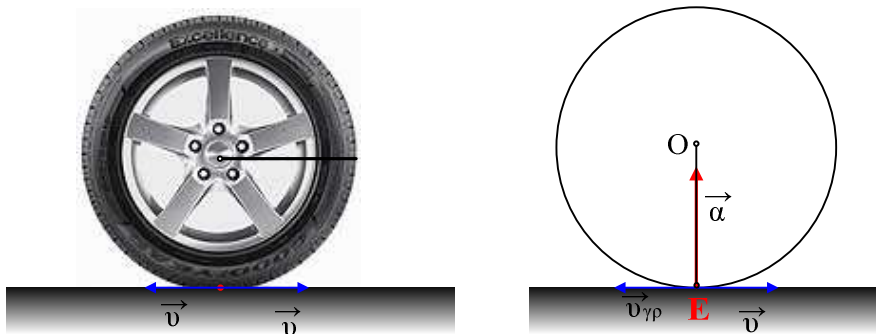
Για τον ακίνητο παρατηρητή Α:

Το σημείο Σ έχει ταχύτητα $v_s = 2v$, η οποία προκύπτει σαν το διανυσματικό άθροισμα της οριζόντιας ταχύτητας του κέντρου μάζας v και της επίσης οριζόντιας γραμμικής ταχύτητας $v_{\gamma\rho} = \omega \cdot R = v$, λόγω της κυκλικής κίνησης του σημείου Σ. Η επιτάχυνση είναι ΞΑΝΑ η α , με φορά προς το κέντρο Ο. Άρα και για τον ακίνητο παρατηρητή η επιτάχυνση αυτή είναι κεντρομόλος και ισχύει:

$$\alpha_k = \frac{v_s^2}{R'} \quad \text{ή}$$

$$R' = \frac{4v^2}{\frac{v^2}{R}} = 4R$$

Και ας έρθουμε τη στιγμή που το σημείο Σ έρχεται στη θέση Ε.

**Για τον κινούμενο παρατηρητή Κ:**

Το σημείο Σ κάνει ομαλή κυκλική κίνηση με ταχύτητα $v_{\gamma\rho} = \omega \cdot R = v_{cm} = v$, έχοντας επιτάχυνση α , η οποία κατευθύνεται προς το κέντρο Ο του κύκλου και η οποία μεταβάλλει τη διεύθυνση της ταχύτητάς του, είναι δηλαδή κεντρομόλος επιτάχυνση.

Δηλαδή ο Κ παρατηρητής λέει:

$$\alpha_k = v^2/R.$$

Για τον ακίνητο παρατηρητή Α:

Το σημείο Σ έχει ταχύτητα $v_s = 0$, η οποία προκύπτει σαν το διανυσματικό άθροισμα της οριζόντιας ταχύτητας του κέντρου μάζας v και της επίσης οριζόντιας γραμμικής ταχύτητας $v_{\gamma\rho} = \omega \cdot R = v$, λόγω της κυκλικής κίνησης του σημείου Σ.

Η επιτάχυνση είναι ΞΑΝΑ η α , με φορά προς το κέντρο Ο.

Αλλά αφού το σημείο Σ δεν έχει ταχύτητα, αυτή η επιτάχυνση θα μεταβάλλει το ΜΕΤΡΟ της ταχύτητας, είναι δηλαδή **επιτρόχιος επιτάχυνση**, ενώ η κεντρομόλος είναι ίση με μηδέν!!!

dmargaris@sch.gr