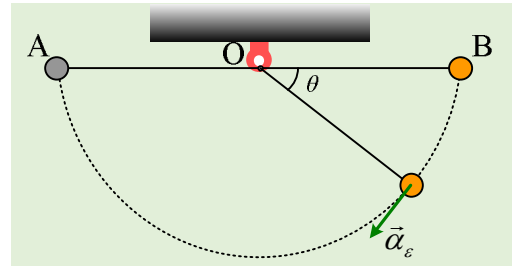


Ένα σύστημα δύο σφαιρών σε κίνηση

Από ένα σταθερό σημείο O , κρέμονται με νήματα μήκους $l=0,45\text{m}$, δύο μικρές σφαίρες A και B με μάζες m και $2m$, αντίστοιχα. Φέρνουμε τις σφαίρες στις θέσεις που φαίνονται στο σχήμα, όπου τα δυο νήματα είναι οριζόντια και σε μια στιγμή τις αφήνουμε ταυτόχρονα να κινηθούν.

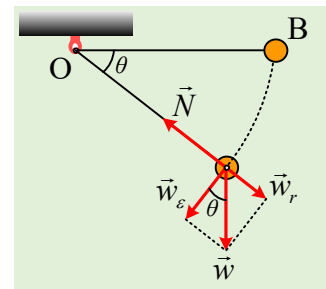


- i) Αφού αποδείξετε ότι η επιτόρξια επιτάχυνση της σφαίρας B , όταν το νήμα σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση, είναι ανεξάρτητη της μάζας της, να εξηγήσετε σε ποια θέση πρόκειται να συγκρουστούν οι δυο σφαίρες.
- ii) Για την χρονική στιγμή που η σφαίρα B πέφτει και το νήμα σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση όπου $\eta\mu\theta=4/9$, να βρεθούν η στροφορμή κάθε σφαίρας και ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής, ως προς οριζόντιο άξονα, ο οποίος περνά από το σημείο O .
- iii) Αν οι δυο σφαίρες μετά από λίγο συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά, να υπολογιστούν ως προς τον άξονα στο O :
 - α) Η ολική στροφορμή του συστήματος ελάχιστη πριν και αμέσως μετά την κρούση.
 - β) Η μεταβολή της στροφορμής της σφαίρας A ως προς το O , η οποία οφείλεται στην κρούση.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$, $m=0,1\text{kg}$ ενώ οι δυο σφαίρες έχουν ίσες ακτίνες, αμελητέες σε σχέση με το μήκος του νήματος.

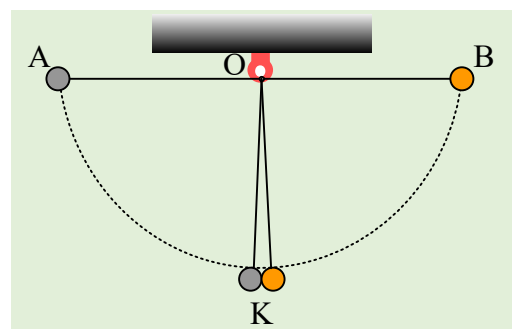
Απάντηση:

- i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο B , όπου η συνισταμένη των δυνάμεων στην διεύθυνση της ακτίνας προκαλούν την αναγκαία κεντρομόλο επιτάχυνση. Ενώ στην εφαπτομενική διεύθυνση η συνισταμένη δύναμη (εδώ η συνιστώσα του βάρους w_ϵ) προκαλεί μια επιτόρξια επιτάχυνση, η οποία προκαλεί την μεταβολή στο μέτρο της ταχύτητα, η οποία είναι επίσης εφαπτόμενη στην τροχιά.



$$\Sigma F_\epsilon = m_2 a_\epsilon \rightarrow m_2 g \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = m_2 a_\epsilon \rightarrow a_\epsilon = g \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η επιτόρξια επιτάχυνση που αποκτά ένα σώμα όπως τα παραπάνω, δεν εξαρτάται από την μάζα, που στην περίπτωση μας, μας λέει ότι, σε κάθε θέση, τα σώματα A και B έχουν επιτόρξιας επιταχύνσεις με το ίδιο μέτρο. Αλλά αφού τα δυο σώματα αφήνονται την ίδια στιγμή, αποκτούν ίσες κατά μέτρο επιταχύνσεις, εφαπτόμενες στις τροχιές, κάθε επόμενη στιγμή θα έχουν ίσου μέτρου ταχύτητες



και θα φτάνουν ταυτόχρονα στην πιο χαμηλή θέση της τροχιάς τους. Τα σώματα δηλαδή φτάνουν ταυτόχρονα στην θέση Κ του σχήματος, όπου και θα συγκρουστούν. Εξάλλου θεωρώντας αμελητέες τις ακτίνες των δύο σφαιρών, μπορούμε (με ελάχιστο σφάλμα), να πάρουμε ότι τα δυο νήματα είναι κατακόρυφα στην θέση της κρούσης.

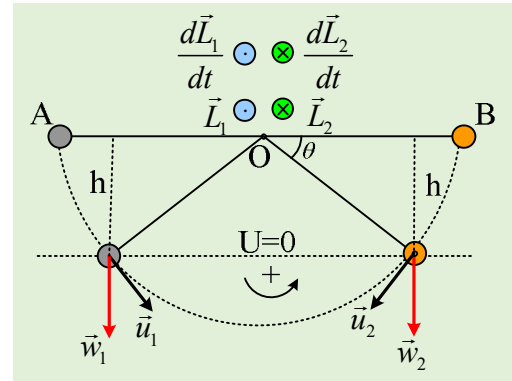
- ii) Εφαρμόζοντας την ΑΔΜΕ για μια σφαίρα (την Α ή την Β, αφού με βάση τα προηγούμενα οι δυο σφαίρες έχουν ίσου μέτρου ταχύτητες, έχοντας διανύσει ίσα τόξα), θεωρώντας την χαμηλότερη θέση (όταν το νήμα σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια θέση), ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, παίρνουμε:

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow$$

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + 0 \rightarrow$$

$$u_1 = u_2 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g\ell \cdot \eta\mu\theta} \quad (1) \rightarrow$$

$$u_1 = u_2 = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,45 \cdot \frac{4}{9}} m/s = 2 m/s$$



Οπότε η Α σφαίρα έχει στροφορμή ως προς άξονα z κάθετο στο επίπεδο της τροχιάς, ο οποίος περνά από το Ο, πάνω στον άξονα με φορά προς τον αναγνώστη και μέτρο:

$$L_1 = m_1 u_1 \ell = 0,1 \cdot 2 \cdot 0,45 kgm^2 / s = 0,09 kgm^2 / s.$$

Με ρυθμό μεταβολής της στροφορμής, ίδιας κατεύθυνσης (βλέπε σχήμα) και μέτρο:

$$\frac{dL_1}{dt} = \Sigma \tau = w \cdot d = mg \cdot d = mg \cdot \ell \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \quad (2)$$

Αλλά $\sigma\upsilon\nu\theta = \sqrt{1 - \eta\mu^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{81-16}{9^2}} \approx \frac{8}{9}$ οπότε με αντικατάσταση:

$$\frac{dL_1}{dt} = mg \cdot \ell \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 0,1 \cdot 10 \cdot 0,45 \cdot \frac{8}{9} kgm^2 / s^2 = 0,4 kgm^2 / s^2.$$

(Παίρνοντας ως θετική φορά διαγραφής, την αντίθετη από την φορά περιστροφής των δεικτών, τότε η παραπάνω στροφορμή και ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής θα έχουν θετικές αλγεβρικές

τιμές, $L_1 = +0,09 kgm^2 / s$ και $\frac{dL_1}{dt} = +0,4 kgm^2 / s^2$.)

Αντίθετα η Β σφαίρα έχει στροφορμή και ρυθμό μεταβολής στροφορμής, αντίθετης κατεύθυνσης (προς τα μέσα), με μέτρα:

$$L_2 = m_2 u_2 \ell = 0,2 \cdot 2 \cdot 0,45 kgm^2 / s = 0,18 kgm^2 / s \quad \text{και}$$

$$\frac{dL_2}{dt} = m_2 g \cdot \ell \cdot \sigma \nu \theta = 0,2 \cdot 10 \cdot 0,45 \cdot \frac{8}{9} \text{ kgm}^2 / \text{s}^2 = 0,8 \text{ kgm}^2 / \text{s}^2.$$

ή μιλώντας για τις αλγεβρικές τιμές των μεγεθών, θα έχουμε:

$$L_2 = -0,18 \text{ kgm}^2 / \text{s} \text{ και } \frac{dL_2}{dt} = -0,8 \text{ kgm}^2 / \text{s}^2.$$

iii) Οι δυο σφαίρες φτάνουν στην κατακόρυφη θέση με ταχύτητες ίσου μέτρου, όπου με βάση την εξίσωση (1), έχουμε:

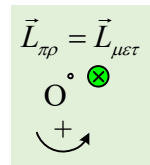
$$v_1 = v_2 = \sqrt{2g\ell} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,45} \text{ m/s} = 3 \text{ m/s}$$

α) Η ολική στροφορμή του συστήματος, ως προς τον άξονα z είναι ίση:

$$L_{\pi \rho \nu} = L_1 + L_2 = m_1 v_1 \ell + (-m_2 v_2 \ell) = 0,1 \cdot 3 \cdot 0,45 \text{ kgm}^2 / \text{s} - 0,2 \cdot 3 \cdot 0,45 \text{ kgm}^2 / \text{s} \rightarrow$$

$$L_{\pi \rho \nu} = -0,135 \text{ kgm}^2 / \text{s}$$

Αλλά στην διάρκεια της κρούσης, δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές στο σύστημα των δύο σφαιρών (οι ροπές των δύο βαρών και των δύο τάσεων είναι μηδενικές), συνεπώς η στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή και $L_{\mu \epsilon \tau} = -0,135 \text{ kgm}^2 / \text{s}$.



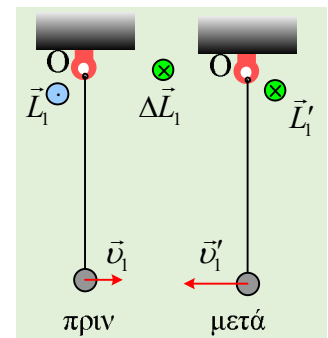
Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τις ταχύτητες μετά την κρούση και από εκεί να υπολογίσουμε την ολική στροφορμή...

β) Για την ταχύτητα της A σφαίρας, μετά την κρούση έχουμε:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \rightarrow$$

$$v'_1 = \frac{0,1 - 0,2}{0,1 + 0,2} 3 \text{ m/s} + \frac{2 \cdot 0,2}{0,1 + 0,2} (-3) \text{ m/s} = -5 \text{ m/s}$$

Οπότε και με βάση το σχήμα για την κατεύθυνση της στροφορμής ως προς τον άξονα z, για την σφαίρα A, έχουμε:



$$\Delta \vec{L}_1 = \vec{L}'_1 - \vec{L}_1 \rightarrow \Delta L_1 = L'_1 - L_1 \rightarrow$$

$$\Delta L_1 = -m_1 |v'_1| \ell - m_1 v_1 \ell = -0,1 \cdot 5 \cdot 0,45 \text{ kgm}^2 / \text{s} - 0,1 \cdot 3 \cdot 0,45 \text{ kgm}^2 / \text{s} = -0,36 \text{ kgm}^2 / \text{s}$$

Με διεύθυνση του άξονα z και φορά προς τα μέσα.

dmargaris@gmail.com