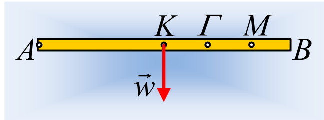
Μια εφαρμογή στις εσωτερικές δυνάμεις…



Μια ομογενής δοκός ΑΒ, μήκους 6m και μάζας 24kg, μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο της Α, διαγράφοντας κατακόρυφο επίπεδο, κάθετο στον άξονα περιστροφής. Η δοκός φέρνεται σε οριζόντια θέση και κάποια στιγμή αφήνεται ελεύθερη να περιστραφεί.

i) Να βρεθεί η αρχική γωνιακή επιτάχυνση της δοκού και η επιτάχυνση του σημείου Μ, όπου (ΜΒ)=1m.

ii) Εστιάζουμε στην κίνηση του τμήματος ΓΒ, όπου (ΓΒ)=2m. Μόλις η δοκός αφεθεί να κινηθεί το τμήμα ΓΒ:

α) δέχεται μόνο οριζόντια δύναμη από το τμήμα ΑΓ της δοκού.

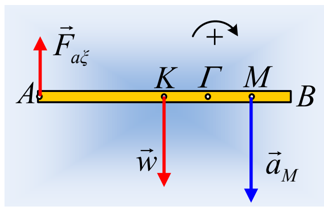
β) δέχεται μόνο κατακόρυφη δύναμη από το τμήμα ΑΓ.

γ) δέχεται μια δύναμη και μια ροπή ζεύγους από το τμήμα ΑΓ.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της δοκού ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της: $I=\dfrac{1}{12}M\ell^2$ και g=10m/s^2.

Απάντηση:

i) Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό, μόλις αφεθεί να κινηθεί.

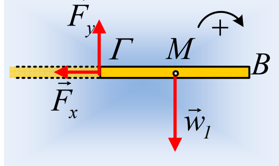


$$\Sigma\tau_A=I_A\cdot\alpha_{γων} \rightarrow Mg\frac{\ell}{2}=\left(\frac{1}{12}M\ell^2+M\frac{\ell^2}{4}\right)\cdot a_{γων}\rightarrow$$

$$\alpha_{γων}=\frac{3g}{2\ell}=\frac{3\cdot 10}{2\cdot 6}rad/s^2=2{,}5rad/s^2.$$

Οπότε το σημείο Μ, το οποίο αφού ω=0, δεν έχει κεντρομόλο επιτάχυνση, έχει μόνο κατακόρυφη επιτάχυνση (επιτρόχια) με μέτρο:

$$a_M=a_{γων}(AM)=2{,}5\cdot 5=12{,}5m/s^2.$$



ii) Ερχόμαστε στο τμήμα ΓΒ της δοκού, το οποίο έχει μάζα m=8kg, αφού η δοκός είναι ομογενής με μάζα 24kg σε μήκος 6m. Δεν ξέρουμε ποια δύναμη ασκεί το τμήμα ΑΓ στο τμήμα ΓΒ, οπότε έχουμε σχεδιάσει δυο συνιστώσες F_x και F_y. Από το 2^o νόμο του Νεύτωνα, θεωρώντας σύνθετη την κίνηση του τμήματος ΓΒ, μια μεταφορική και μια στροφική γύρω από κάθετο άξονα που περνά από το μέσον του Μ, παίρνουμε:

$$\Sigma F_x=m\alpha_x \rightarrow F_x=m\frac{\upsilon_M^2}{R}=m\omega^2R=0$$

αφού η γωνιακή ταχύτητα της δοκού είναι μηδενική.

$$\Sigma F_y = m\cdot\alpha_{cm} \rightarrow w_1 - F_y = m\cdot\alpha_M \rightarrow$$

$$F_y = mg - m\alpha_M = 8\cdot 10N - 8\cdot 12{,}5N = -20N.$$

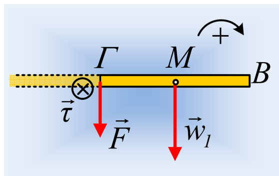
Συνεπώς το τμήμα ΑΓ ασκεί στο τμήμα ΓΒ δύναμη κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω και μέτρο 20Ν, αντίθετης δηλαδή φοράς από αυτήν που αρχικά έχει σχεδιαστεί.

$$\Sigma\tau = I_M\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \ \Sigma\tau = \left(\frac{1}{12}m\ell_1^2\right)a_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{12}8\cdot 2^2\cdot 2{,}5Nm = {}^{20}\!/_{3}\,Nm$$

Όμως με βάση το προηγούμενο σχήμα, η μόνη δύναμη που έχει ροπή ως προς το Μ, είναι η δύναμη F_y, η ροπή της οποίας είναι:

$$\tau_{Fy} = \tau_F = -20\cdot 1N\cdot m = -20Nm$$

πράγμα που σημαίνει ότι στο τμήμα ΓΜ ασκείται και μια επιπλέον ροπή. Από ποιον μπορεί να ασκηθεί. Μα, από το τμήμα ΑΓ!!! Δεν υπάρχει κάτι άλλο που να μπορεί να συμβεί. Αλλά τότε στο Γ, εκτός της δύναμης F, ασκείται και μια ροπή (ζεύγους), όπως στο σχήμα, όπου:



$$\Sigma\tau = \left(\frac{1}{12}m\ell_1^2\right)a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \tau + \tau_F = \left(\frac{1}{12}m\ell_1^2\right)a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$\tau - F_y(\Gamma M) = \left(\frac{1}{12}m\ell_1^2\right)a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$\tau = 20\cdot 1Nm + \frac{1}{12}8\cdot 2^2\cdot 2{,}5Nm = {}^{80}\!/_{3}\,Nm$$

Συνεπώς σωστή είναι η γ) πρόταση.

Υλικό Φυσικής-Χημείας
Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης