

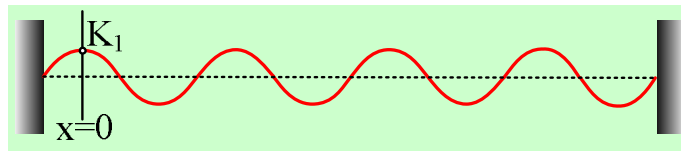
Άλλο ένα στάσιμο σε χορδή και η εξίσωσή του.

Μια χορδή με σταθερά άκρα διεγείρεται οπότε δημιουργείται πάνω της ένα στάσιμο κύμα με 7 δεσμούς (εκτός των δύο άκρων). Η πρώτη κοιλία K_1 απέχει 3cm από το αριστερό άκρο της χορδής και τη στιγμή που θεωρούμε $t=0$, έχει μέγιστη ταχύτητα με τιμή 40π cm/s, ενώ τη στιγμή $t_1=0,05$ s η ταχύτητά της είναι $v_1=-40\pi$ cm/s, για πρώτη φορά.

- i) Να βρεθεί το πλάτος ταλάντωσης της κοιλίας K_1 , καθώς και το μήκος L της χορδής.
- ii) Να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος, θεωρώντας ότι η πρώτη κοιλία βρίσκεται στη θέση $x=0$.
- iii) Να σχεδιάσετε στιγμιότυπα της χορδής τις χρονικές στιγμές $t_2=1/40$ s και $t_3=1/16$ s, στο ίδιο σύστημα αξόνων.
- iv) Να βρεθεί η εξίσωση του ίδιου στάσιμου, θεωρώντας $x=0$ το αριστερό άκρο της χορδής.

Απάντηση:

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος κάποια στιγμή, που η πρώτη κοιλία K_1 βρίσκεται σε μέγιστη θετική απομάκρυνση.



- i) Τη χρονική στιγμή $t=0$ η κοιλία K_1 έχει μέγιστη θετική ταχύτητα, συνεπώς περνά από τη θέση ισορροπίας και η ταχύτητα αυτή είναι μέγιστη. Τη στιγμή $t_1=0,05$ s η κοιλία ξαναπερνά από τη θέση ισορροπίας, συνεπώς το χρονικό διάστημα που μεσολάβησε αντιστοιχεί σε μισή περίοδο, άρα $T=2t_1=0,1$ s. Αλλά $v_{\max}=\omega \cdot 2A \rightarrow 2A=\frac{v_{\max}}{\omega}=\frac{v_{\max}}{2\pi}T=\frac{40\pi}{2\pi}0,1\text{cm}=2\text{cm}$, όπου A το πλάτος των τρεχόντων κύματων, από την συμβολή των οποίων προέκυψε το στάσιμο.

Εξάλλου με βάση το σχήμα το μήκος της χορδής ισούται με $8 \cdot \lambda/2$, όπου $\lambda/2$ η απόσταση μεταξύ δύο δεσμών. Αλλά η κοιλία K_1 απέχει 3cm από το αριστερό άκρο, απόσταση που αντιστοιχεί σε $\lambda/4$. Έτσι $\lambda=12\text{cm}$ και $L=8 \cdot \frac{12}{2}\text{cm}=48\text{cm}$

- ii) Αφού στη θέση $x=0$ έχουμε κοιλία του στάσιμου κύματος, η οποία τη στιγμή $t=0$ περνά από τη θέση ισορροπίας κινούμενη προς τη θετική κατεύθυνση, θα ισχύει η εξίσωση του βιβλίου, όπου $2A=2\text{cm}$:

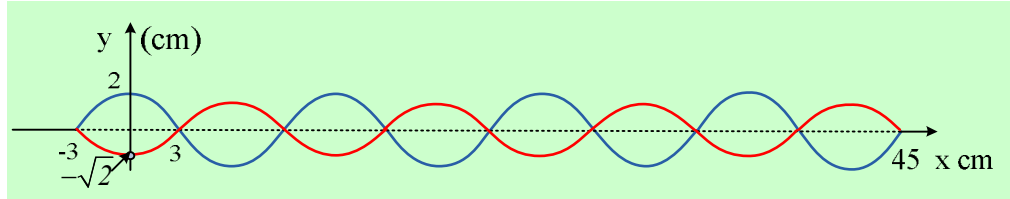
$$y=2A \cdot \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta\mu \frac{2\pi t}{T}=2 \cdot \sin \frac{2\pi x}{12} \cdot \eta\mu \frac{2\pi t}{0,1}=2 \sin \frac{\pi x}{6} \cdot \eta\mu 20\pi t \quad (x,y \rightarrow \text{cm}, t \rightarrow \text{s})$$

- iii) Για $t_2=1/40$ s παίρνουμε: $y=2 \sin \frac{\pi x}{6} \cdot \eta\mu 20\pi t=2 \sin \frac{\pi x}{6} \cdot \eta\mu 20\pi \frac{1}{40}=2 \sin \frac{\pi x}{6}$ και η γραφική παράσταση είναι η καμπύλη με μπλε χρώμα, στο διάγραμμα.

Αντίστοιχα για $t_3=1/16s$ έχουμε :

$$y=2\sigma\eta\nu\frac{\pi x}{6}\cdot\eta\mu 20\pi t=2\sigma\eta\nu\frac{\pi x}{6}\cdot\eta\mu 20\pi\frac{1}{16}=2\sigma\eta\nu\frac{\pi x}{6}\cdot\eta\mu\frac{5\pi}{4}=-\sqrt{2}\sigma\eta\nu\frac{\pi x}{6}$$

Το αντίστοιχο γράφημα με κόκκινο χρώμα στο σχήμα.



iv) Αν θεωρήσουμε $x=0$ το αριστερό άκρο της χορδής, η εξίσωση θα έχει την ίδια μορφή, όσον αφορά, μέγιστο πλάτος και συχνότητα, αλλά με διαφορετική μορφή του πλάτους έτσι ώστε στη θέση αυτή να έχουμε δεσμό. Έτσι η εξίσωση του στάσιμου κύματος θα έχει τη μορφή:

$$y=2A\cdot\sigma\eta\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}+\theta\right)\cdot\eta\mu\frac{2\pi t}{T}=2\sigma\eta\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}+\theta\right)\cdot\eta\mu 20\pi t$$

$$\text{Για } x=0, \text{ τότε } A'=0 \text{ ή } \sigma\eta\nu\left(\frac{2\pi\theta}{\lambda}+\theta\right)=0 \rightarrow \sigma\eta\nu\theta=0 \rightarrow \theta=\frac{\pi}{2} \text{ ή } \theta=\frac{3\pi}{2}$$

Εξάλλου για $t=T/4$ και $x=3\text{cm}$ πρέπει $y=+2\text{cm}$, αφού η πρώτη κοιλία βρίσκεται στη μέγιστη θετική απομάκρυνση, οπότε:

$$y=2\sigma\eta\nu\left(\frac{2\pi 3}{12}+\theta\right)\cdot\eta\mu\frac{2\pi T}{T}\frac{T}{4}=2\sigma\eta\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=2 \rightarrow -\eta\mu\theta=1 \rightarrow \eta\mu\theta=-1 \rightarrow \theta=\frac{3\pi}{2}$$

Αλλά τότε $\sigma\eta\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}+\frac{3\pi}{2}\right)=\eta\mu\frac{2\pi x}{\lambda}$ και η εξίσωση γίνεται:

$$y=2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{6}\right)\cdot\eta\mu 20\pi t \quad (x,y \rightarrow \text{cm}, t \rightarrow \text{s})$$

dmargaris@sch.gr