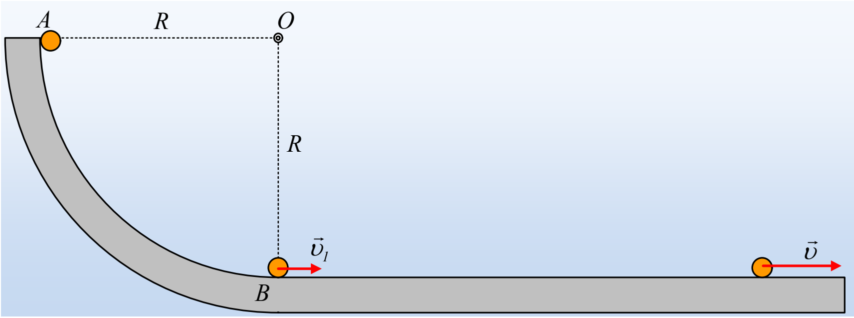
Μια φορτισμένη σφαίρα σε τεταρτοκύκλιο.



Από την κορυφή Α ενός λείου κατακόρυφου τεταρτοκυκλίου, ακτίνας R=1,25m αφήνεται να κινηθεί μια μικρή σφαίρα μάζας m=10g η οποία φέρει φορτίου q_1=12,5μC. Στο κέντρο Ο του τεταρτοκυκλίου έχει στερεωθεί ένα μικρό σώμα με φορτίο q_2=400/3μC.

i) Να υπολογισθεί η δύναμη που δέχεται η σφαίρα από το τεταρτοκύκλιο στην θέση Α.

ii) Πόσο είναι το έργο της δύναμης Coulomb κατά την κίνηση της σφαίρας από την κορυφή Α, στη βάση Β του τεταρτοκυκλίου;

iii) Να υπολογίσετε την ταχύτητα υ_1 της σφαίρας τη θέση Β.

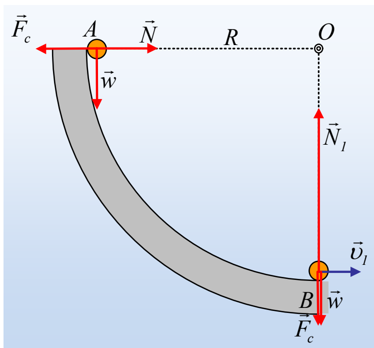
iv) Πόση δύναμη δέχεται η σφαίρα από το τεταρτοκύκλιο στη θέση Β, ελάχιστα πριν περάσει στο λείο οριζόντιο επίπεδο;

v) Να βρεθεί η μέγιστη ταχύτητα υ της σφαίρας κατά την κίνησή της στο οριζόντιο επίπεδο.

Δίνεται $k=9\cdot 10^9 N\cdot m^2/C^2$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στην σφαίρα, μόλις αφεθεί στη θέση Α, όπου F_c η δύναμη Coulomb, Ν η κάθετη αντίδραση του επιπέδου και w το βάρος της σφαίρας. Στην οριζόντια διεύθυνση η σφαίρα ισορροπεί, οπότεQ



$$\Sigma F=0 \quad \text{ή} \quad N=F_c \quad \rightarrow$$

$$N=F_c=k\frac{|q_1\cdot q_2|}{R^2}=9\cdot 10^9\,\frac{12,5\cdot 10^{-6}\cdot {}^{4}\!/\!{}_{3}\cdot 10^{-6}}{1,25^2}\,N\approx 0,1N$$

ii) Σε όλη τη διάρκεια της κίνησης της σφαίρας από τη θέση Α μέχρι τη θέση Β, η δύναμη Coulomb που δέχεται έχει τη διεύθυνση της ακτίνας, πράγμα που σημαίνει ότι είναι κάθετη στη μετατόπιση, συνεπώς δεν παράγει έργο, οπότε $W_{A\rightarrow B}$=0. Εξάλλου:

$$W_{A\rightarrow B}=q_1(V_A-V_B)=q_1\left(k\frac{q_2}{R}-k\frac{q_2}{R}\right)=0$$

iii) Αν εφαρμόσουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για την κινούμενη σφαίρα από το Α στο Β και λαμβάνοντας υπόψη ότι το βάρος είναι συντηρητική δύναμη, το έργο της οποίας δεν εξαρτάται από τη διαδρομή, παίρνουμε:

$$K_B - K_A = W_w + W_{F_c} + W_N \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - 0 = mgR + 0 + 0 \rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 1{,}25}m/s = 5m/s$$

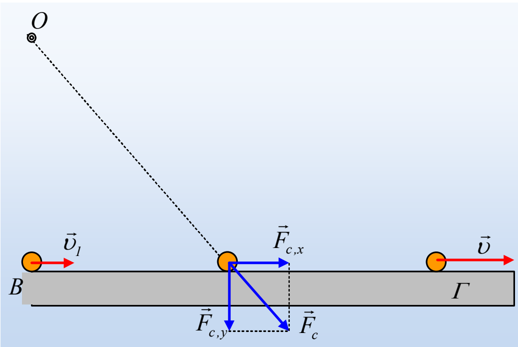
iv) Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στη σφαίρα, ελάχιστα πριν εγκαταλείψει το τεταρτοκύκλιο, είναι ίση με την κεντρομόλο δύναμη, οπότε λαμβάνοντας υπόψη ότι το μέτρο της δύναμης Coulomb είναι το ίδιο με αυτό που υπολογίσαμε στο i) ερώτημα (ίση απόσταση R) έχουμε:

$$\Sigma F = m\frac{\upsilon_1^2}{R} \rightarrow$$

$$N_1 - mg - F_c = m\frac{\upsilon_1^2}{R} \rightarrow N_1 = mg + F_c + m\frac{\upsilon_1^2}{R}$$

$$N_1 = 0{,}01\cdot 10N + 0{,}1N + 0{,}01\frac{5^2}{1{,}25}N = 0{,}4N$$

v) Καθώς η σφαίρα περνά στο οριζόντιο επίπεδο, η ασκούμενη δύναμη Coulomb (στη πραγματικότητα η συνιστώσα $F_{c,x}$), επιταχύνει τη σφαίρα μέχρι να απομακρυνθεί σε πολύ μεγάλη απόσταση (στο άπειρο).



Έτσι εφαρμόζοντας τη διατήρηση της ενέργειας μεταξύ της θέσης Β και της θέσης Γ, στο άπειρο, παίρνουμε:

$$K_B + U_B = K_\infty + U_\infty \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + q_1V_B = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + q_1V_\infty \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + q_1\cdot k\frac{q_2}{R} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + q_1\cdot 0 \rightarrow$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_1^2 + \frac{2kq_1q_2}{mR}} \rightarrow$$

$$\upsilon = \sqrt{5^2 + \frac{2\cdot 9\cdot 10^9\cdot 12{,}5\cdot 10^{-6}\cdot {}^4\!/_3\cdot 10^{-6}}{0{,}01\cdot 1{,}25}}m/s = 7m/s$$

dmargaris@gmail.com