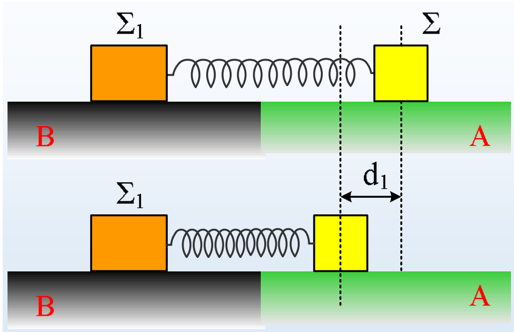
Όταν το άλλο σώμα κάνει την φθίνουσα ταλάντωση!



Δυο σώματα Σ και Σ_1, με μάζες m=2kg και M=4kg είναι δεμένα στα άκρα ενός ιδανικού ελατηρίου (αρκετού μήκους) σταθεράς k=50N/m. Τα σώματα ηρεμούν σε οριζόντιο επίπεδο, το οποίο χωρίζεται σε δυο περιοχές Α και Β, όπου το τμήμα Α είναι λείο, ενώ το Β όχι, με το ελατήριο στο φυσικό μήκος του. Κρατώντας ακίνητο το σώμα Σ_1, εκτρέπουμε το σώμα Σ προς τα αριστερά συμπιέζοντας το ελατήριο κατά d_1=0,4m και το αφήνουμε να ταλαντωθεί την στιγμή t_0=0, ενώ αφήνοντας ελεύθερο το Σ_1, παρατηρούμε ότι παραμένει ακίνητο.

i) Θεωρώντας την αρχική απομάκρυνση θετική, να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης του Σ σε συνάρτηση με το χρόνο (x=x(t)).

ii) Να κάνετε την γραφική παράσταση της τριβής, η οποία ασκείται στο σώμα Σ_1, σε συνάρτηση με το χρόνο.

iii) Αν επαναλάβουμε το πείραμα αυξάνοντας την αρχική εκτροπή του σώματος Σ, παρατηρούμε ότι η μέγιστη εκτροπή, για την οποία δεν παρατηρείται μετακίνηση του Σ_1, είναι d_2=0,5m. Να βρεθεί ο συντελεστής οριακής τριβής μεταξύ του επιπέδου Β και του σώματος Σ_1.

iv) Αν μεταξύ του σώματος Σ_1 και του επιπέδου Β αναπτυσσόταν τριβή με συντελεστές $\mu=\mu_s$=0,2 και εκτρέπαμε ξανά το σώμα Σ κατά d_2, να υπολογιστεί το συνολικό διάστημα που θα διανύσει το σώμα Σ_1, μέχρι να σταματήσει, αν το σώμα Σ ταλαντώνεται τελικά με πλάτος A_3=0,35m.

Δίνεται g=10m/s^2.

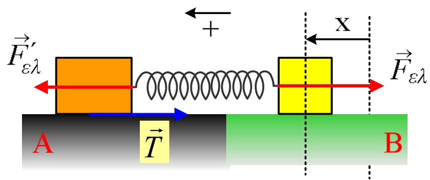
Απάντηση:

i) Έχοντας αρχική συσπείρωση του ελατηρίου κατά d_1, θα έχουμε και ταλάντωση του σώματος Α με πλάτος $A_1=d_1$, ενώ η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι ίση:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{50}{2}}\ {}^{rad}/_{s} = 5\,{}^{rad}/_{s}$$

Αλλά αν η αρχική απομάκρυνση θεωρηθεί θετική, το σώμα ξεκινά την ταλάντωσή του από την θέση $x=+A_1$=0,4m, έχοντας αρχική φάση φ_o= π/2 (γιατί;) και η εξίσωση της απομάκρυνσης, παίρνει την μορφή:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o) = 0{,}4 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ μονάδες στο S.I.}$$



ii) Στο διπλανό σχήμα, έχουμε περιοριστεί στον σχεδιασμό μόνο των οριζόντιων δυνάμεων, οι οποίες ασκούνται στα δυο σώματα. Το σώμα Σ εκτελεί ΑΑΤ, άρα για τις δυνάμεις που δέχεται ισχύει:

$$\Sigma F = -Dx \rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = -kx = -50 \cdot 0{,}4 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) = -20 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \ (S.I.)$$

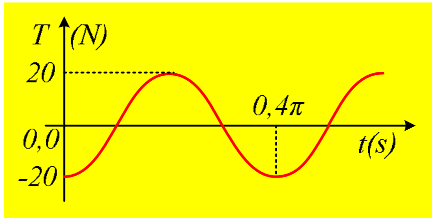
Αλλά τότε στο σώμα Σ_1 ασκείται η αντίθετη δύναμη από το ελατήριο:

$$F'_{\varepsilon\lambda} = +20 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \ (S.I.)$$

Ενώ από την ισορροπία του Σ_1 παίρνουμε:

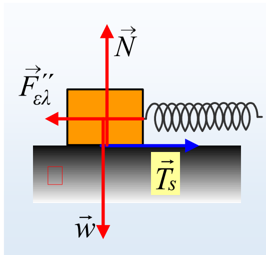
$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow T + F'_{\varepsilon\lambda} = 0 \rightarrow T = -F'_{\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$T = -20 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \ (S.I.)$$



Η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης, είναι αυτή του διπλανού σχήματος.

iii) Αυξάνοντας το πλάτος τη ταλάντωσης του σώματος Α, αυξάνεται και το πλάτος της δύναμης του ελατηρίου, συνεπώς αυξάνεται και το μέτρο της μέγιστης ασκούμενης τριβής. Έτσι για d_2=0,5m, θα έχουμε και πλάτος A_2=0,5m και το σώμα οριακά δεν θα ολισθήσει, οπότε η (μέγιστη) τριβή θα καταστεί οριακή. Έτσι από την ισορροπία του σώματος Σ_1, θα πάρουμε:



$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow T_s + F''_{\varepsilon\lambda} = 0 \rightarrow T_s = -F''_{\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$T_s = -50 \cdot 0{,}5 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) = -25 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \ (S.I.)$$

Έτσι για την μέγιστη τιμή της στατικής τριβής, την οριακή τριβή, μέτρου $T_{o\rho}$=25N, θα έχουμε:

$$T_{o\rho} = \mu_s N = \mu_s Mg \rightarrow \mu_s = \frac{T_{o\rho}}{Mg} = \frac{25}{4 \cdot 10} = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

iv) Αν μειώναμε το συντελεστή τριβής, με την ίδια αρχική συσπείρωση του ελατηρίου, το σώμα Σ_1 θα ολισθήσει, αρχικά προς τα αριστερά, οπότε το έργο της τριβής ολίσθησης $\Delta W_1 = -T \cdot \Delta s_1$, θα μετράει την ενέργεια που θα εμφανίζεται ως θερμική $\Delta Q_1 = T \cdot \Delta s_1$. Στην συνέχεια, το σώμα θα κινηθεί προς τα δεξιά, οπότε η τριβή θα είναι προς τα αριστερά οπότε ομοίως $\Delta Q_2 = T \cdot \Delta s_2$. Θα έχουμε δηλαδή μια φθίνουσα ταλάντωση του σώματος Σ_1 (προσοχή με δύναμη απόσβεσης, την τριβή ολίσθησης, σταθερού μέτρου $T = \mu \cdot N$), συνεπώς κάποια στιγμή θα σταματήσει να κινείται, ενώ η συνολική θερμική ενέργεια, λόγω τριβής θα είναι:

$$Q_\theta = T \cdot \Delta S_1 + T \cdot \Delta S_2 + \cdots T \cdot \Delta S_\nu = T \cdot S_{o\lambda} = \mu Mg \cdot S_{o\lambda}$$

Μόλις το σώμα Σ_1 σταματήσει, η κίνηση του σώματος Σ θα είναι πλέον μια ΑΑΤ, (αφού θα έχουμε σταθερό το άλλο άκρο του ελατηρίου), πράγμα που δεν συνέβαινε μέχρι την στιγμή εκείνη, όπου η κίνησή του είναι παλινδρομική αλλά όχι ΑΑΤ. Αλλά από την διατήρηση της ενέργειας, η αρχική δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, κατά ένα μέρος θα μετατραπεί σε θερμική, λόγω τριβής, ενώ το υπόλοιπο θα εμφανίζεται ως δυναμική και κινητική ενέργεια για την ταλάντωση που τελικά θα κάνει το σώμα Σ:

$$\frac{1}{2}k \cdot (\Delta l)^2 = \mu Mg \cdot S_{o\lambda} + \frac{1}{2}k \cdot A_3^2 \rightarrow$$

$$S_{o\lambda} = k\frac{d_2^2 - A_3^2}{2\mu Mg} \rightarrow$$

$$S_{o\lambda} = 50\frac{0{,}5^2 - 0{,}35^2}{2 \cdot 0{,}2 \cdot 4 \cdot 10}m = 0{,}4m$$

dmargaris@gmail.com