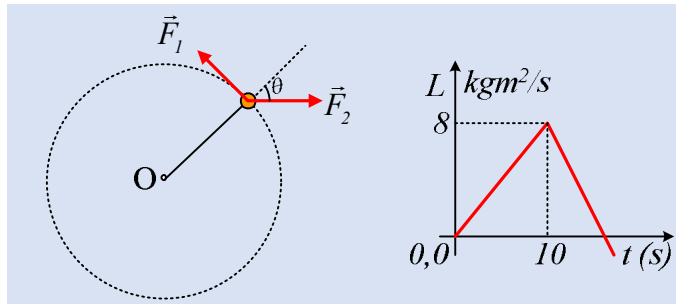


Δυο δυνάμεις και η στροφορμή του σώματος

Ένα υλικό σημείο αμελητέων διαστάσεων, με μάζα $m=1\text{kg}$, ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στο άκρο αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους $l=2\text{m}$, το άλλο άκρο του οποίου έχει δεθεί σε σταθερό σημείο O . Σε μια στιγμή $t=0$, στο σώμα ασκούνται δύο οριζόντιες, σταθερού μέτρου δυνάμεις $F_1=F_2=1\text{N}$, όπου η F_1 είναι κάθετη στο νήμα, ενώ η F_2 σχηματίζει



γωνία θ , με την προέκταση του νήματος, με αποτέλεσμα το σώμα να διαγράφει οριζόντιο κύκλο, όπως στο σχήμα (σε κάτωψη). Στο διπλανό διάγραμμα δίνεται η στροφορμή του σώματος, ως προς το κέντρο O της κυκλικής τροχιάς, σε συνάρτηση με το χρόνο, όπου τη στιγμή $t'=10\text{s}$, παύει να ασκείται η δύναμη F_1 .

- i) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σώματος, ως προς το O , τη χρονική στιγμή $t_1=5\text{s}$.
- ii) Να βρεθεί η γωνία θ .
- iii) Για την χρονική στιγμή $t_1=5\text{s}$ να υπολογιστούν:
 - α) Η ισχύς κάθε δύναμης που ασκείται στο σώμα.
 - β) Η τάση του νήματος.
 - γ) Η γωνιακή επιτάχυνση του σώματος.
- iv) Να υπολογιστεί η στροφορμή του σώματος, ως προς το O , την χρονική στιγμή $t_2=14\text{s}$.

Απάντηση:

- i) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σώματος, προκύπτει από την κλίση του διαγράμματος $L-t$, η οποία παραμένει σταθερή, μέχρι τη στιγμή t' :

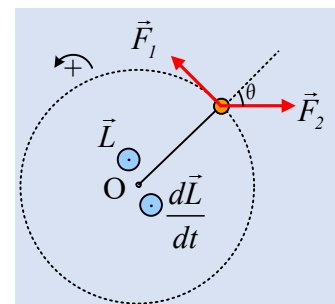
$$\left(\frac{dL}{dt}\right)_1 = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{8 \text{ kgm}^2}{10 \text{ s}^2} = 0,8 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$$

- ii) Ο παραπάνω ρυθμός, συνδέεται με τις ασκούμενες ροπές, με βάση το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα (η αντισωρολογική φορά θετική):

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \Sigma \tau = F_1 R - F_2 \eta \mu \theta \cdot R \rightarrow$$

$$\eta \mu \theta = \frac{F_1 R - \Delta L / \Delta t}{F_2 R} = \frac{1 \cdot 2 - 0,8}{1 \cdot 2} = 0,6$$

Η γωνία δηλαδή που σχηματίζει η δύναμη F_2 , με την προέκταση της ακτίνας (βλέπε σχήμα) έχει $\eta \mu \theta = 0,6$ (και $\sigma \nu \theta = 0,8$, ενώ αν έχουμε κομπιουτεράκι, μπορούμε να απαντήσουμε και $\theta = 36,9^\circ \dots$).



iii) Την στιγμή $t_1=5s$ η στροφορμή του σώματος έχει μέτρο $L_1=4kg \cdot m^2/s$ (γιατί;), οπότε για την ταχύτητα θα έχουμε:

$$L_1 = mv_1R \rightarrow v_1 = \frac{L_1}{mR} = \frac{4}{1 \cdot 2} m/s = 2 m/s$$

α) Για την ισχύ των δύο δυνάμεων θα έχουμε:

$$P_1 = F_1v_1 \cdot \sin 0^\circ = 1 \cdot 2W \cdot 1 = 2W$$

$$P_2 = F_2v_1 \sin(90^\circ + \theta) = -F_2v_1 \eta \mu \theta = -1 \cdot 2 \cdot 0,6W = -1,2W$$

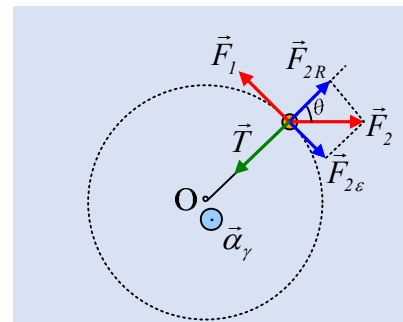
(θα μπορούσαμε να αναλύσουμε την F_2 σε δυο συνιστώσες, όπως στο παρακάτω σχήμα, οπότε η εφαπτομενική συνιστώσα $F_{2\varepsilon}=F_2 \cdot \eta \mu \theta$ καθορίζει την ισχύ της...)

β) Στο διπλανό σχήμα έχουμε αναλύσει την F_2 σε δυο συνιστώσες, οπότε στην διεύθυνση της ακτίνας θα έχουμε:

$$\Sigma F_R = m \frac{v^2}{R} \rightarrow T - F_{2R} = m \frac{v_1^2}{R} \rightarrow$$

$$T = F_2 \cdot \cos \theta + m \frac{v_1^2}{R} \rightarrow$$

$$T = 1 \cdot 0,8N + 1 \frac{2^2}{2} N = 2,8N$$



γ) Από τον 2° νόμο του Νεύτωνα, στην διεύθυνση της εφαπτομένης του κύκλου, παίρνουμε:

$$\Sigma F_\varepsilon = m a_{\varepsilon\pi} = m a_\gamma R \rightarrow$$

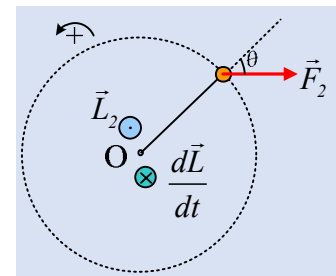
$$a_\gamma = \frac{F_1 - F_2 \eta \mu \theta}{mR} = \frac{1 - 1 \cdot 1 \cdot 0,6}{1 \cdot 2} rad/s^2 = 0,2 rad/s^2$$

Κάθετη στο επίπεδο με φορά προς τα πάνω, όπως στο παραπάνω σχήμα.

iv) Μόλις καταργηθεί η δύναμη F_1 , ο νέος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι επίσης σταθερός με τιμή:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \Sigma \tau = -F_2 \cdot \eta \mu \theta \cdot R \rightarrow$$

$$\frac{dL}{dt} = -1 \cdot 0,6 \cdot 2kg \cdot m^2/s^2 = -1,2kg \cdot m^2/s^2$$



Αλλά τότε για την στροφορμή τη στιγμή t_2 θα έχουμε:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{L_2 - L'}{t_2 - t'} \rightarrow L_2 = L' + \left(\frac{dL}{dt}\right) \cdot (t_2 - t')$$

$$L_2 = 8kg \cdot m^2/s - 1,2 \cdot 4kg \cdot m^2/s = 3,2 kg \cdot m^2/s$$