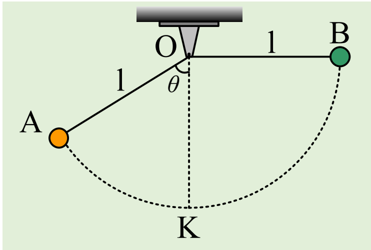
Η κρούση με μια άγνωστη σφαίρα



Δυο μικρές σφαίρες Α και Β, αμελητέων διαστάσεων, είναι δεμένες στα κάτω άκρα δύο αβαρών και μη εκτατών νημάτων, με το ίδιο μήκος l=2m, τα άλλα άκρα των οποίων έχουν δεθεί σε σταθερό σημείο Ο. Εκτρέπουμε την σφαίρα Α κατά γωνία θ (όπου ημθ=0,8 και συνθ=0,6) και την σφαίρα Β στην αντίθετη πλευρά, ώστε το νήμα να γίνει οριζόντιο, όπως στο σχήμα. Σε μια στιγμή αφήνουμε ελεύθερη την σφαίρα Β και μετά από λίγο και την σφαίρα Α. Οι δυο σφαίρες συγκρούονται στην θέση Κ, όπου τα νήματα γίνονται κατακόρυφα. Η Α σφαίρα έχει μάζα 0,4kg και μετά την κρούση κινείται προς τα αριστερά, με αποτέλεσμα το νήμα εκτρέπεται κατά μια μέγιστη γωνία φ, όπου συνφ=0,75. Ζητούνται:

i) Ο αρχικός ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας Α, αμέσως μόλις αφεθεί να κινηθεί, ως προς το σημείο Ο.

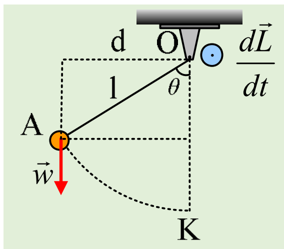
ii) Η στροφορμή της σφαίρας Α και ο ρυθμός μεταβολής της, ως προς το Ο, ελάχιστα πριν την κρούση των δύο σφαιρών.

iii) Το μέγιστο μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας Α, ως προς το Ο, μετά την κρούση.

iv) Η μεταβολή της στροφορμής ως προς το Ο της σφαίρας Β, η οποία οφείλεται στην κρούση.

Δίνεται $g=10m/s^2$

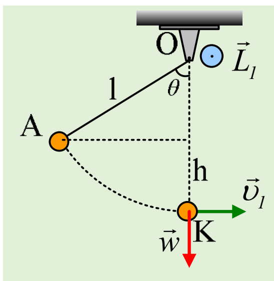
Απάντηση:



i) Έστω d η απόσταση του φορέα του βάρους της Α σφαίρας, από το Ο. Μόλις η σφαίρα αφεθεί να κινηθεί τότε ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της, ως προς το Ο, μόλις αφεθεί να κινηθεί, θα είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο της σελίδας, με φορά προς τα έξω και μέτρο:

$$\frac{dL}{dt} = \tau_{w,O} = wd = mg \cdot l\eta\mu\theta \rightarrow$$

$$\frac{dL}{dt} = 0{,}4 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 0{,}8\, {kgm^2}/{s^2} = 6{,}4\, {kgm^2}/{s^2}.$$



ii) Θεωρούμε το οριζόντιο επίπεδο, το οποίο περνά από την χαμηλότερη θέση της τροχιάς Κ, ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας και εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (ΑΔΜΕ), για την σφαίρα, μεταξύ των θέσεων Α και Κ:

$$K_A + U_A = K_K + U_K \rightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 + 0 \rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl(1-\sigma\upsilon\nu\theta)}$$

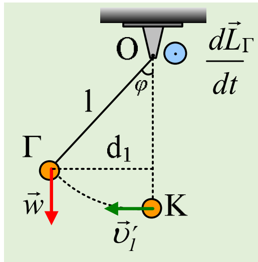
$$v_1 = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 2(1-0{,}6)}\, {m}/{s} = 4\, {m}/{s}$$

Οπότε, ελάχιστα πριν την κρούση, η σφαίρα Α, έχει στροφορμή, κάθετη στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα έξω, όπως στο σχήμα, με μέτρο:

$$L_1 = m\upsilon_1 l = 0{,}4 \cdot 4 \cdot 2 \, {kgm^2}/{s} = 3{,}2 \, {kgm^2}/{s}$$

Στην θέση αυτή, ο φορέας του βάρους περνά από το Ο, οπότε δεν ασκείται κάποια ροπή στην σφαίρα Α, επομένως ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της, ως προς το Ο, είναι μηδενικός.

$$\frac{dL_1}{dt} = 0$$



iii) Μετά την κρούση, καθώς η σφαίρα Α κινείται προς τα αριστερά αυξάνει ο μοχλοβραχίονας του βάρους ως προς το Ο, οπότε αυξάνεται και το μέτρο της αντίστοιχης ροπής. Συνεπώς ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής (μέγιστο μέτρο του ρυθμού…) θα είναι στην μέγιστη γωνία εκτροπής φ.

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)_{max} = \left(\frac{dL_\Gamma}{dt}\right) = wd_1 = mg \cdot l\eta\mu\varphi \rightarrow$$

Όμως για την γωνία φ, $\eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi = 1 \ \rightarrow$

$$\eta\mu\varphi = \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\varphi} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)_{max} = 0{,}4 \cdot 10 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \, {kgm^2}/{s^2} = 2\sqrt{7} \, {kgm^2}/{s^2}.$$

iv) Για να βρούμε την ταχύτητα της σφαίρας Α, μετά την κρούση, δουλεύουμε όπως στο ii) ερώτημα.

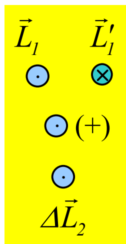
$$K_K + U_K = K_\Gamma + U_\Gamma \rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1'^2 + 0 = mgh' + 0 \rightarrow$$

$$\upsilon'_1 = \sqrt{2gh'} = \sqrt{2gl(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)}$$

$$\upsilon'_1 = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 2(1 - 0{,}75)} \, {m}/{s} = \sqrt{10} \, {m}/{s}$$

Με κατεύθυνση προς τα αριστερά.

Αλλά τότε από την αρχή διατήρησης της στροφορμής για το σύστημα των δύο σφαιρών (οι ασκούμενες εξωτερικές ροπές είναι μηδενικές), παίρνουμε:



$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}_1' + \vec{L}_2' \rightarrow$$

$$\Delta\vec{L}_2 = \vec{L}_2' - \vec{L}_2 = -\left(\vec{L}_1' - \vec{L}_1\right)$$

Στο διπλανό σχήμα έχουν σημειωθεί τα διανύσματα της στροφορμής της σφαίρας Α, πριν και μετά την κρούση. Θεωρώντας την προς τα έξω κατεύθυνση ως θετική, θα δουλέψουμε με τις αλγεβρικές τιμές των στροφορμών:

$$\Delta L_2 = -(-m\upsilon'_1 l - m\upsilon_1 l) = ml(\upsilon'_1 + \upsilon_1) \rightarrow$$

$$\Delta L_2 = 0{,}4 \cdot 2\left(\sqrt{10}+4\right) {kgm^2}/{s} \approx 5{,}7 \, {kgm^2}/{s}$$

Θετική τιμή της μεταβολής της στροφορμής, σημαίνει ότι το διάνυσμα είναι κάθετο στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα έξω…

dmargaris@gmail.com