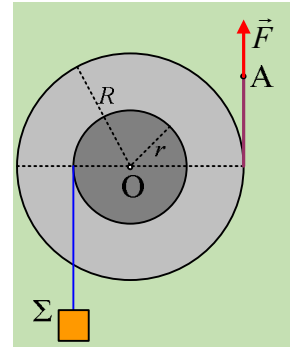


Ταχύτητες και επιταχύνσεις σε μια τροχαλία

Η διπλή ομογενής τροχαλία του σχήματος, ακτίνας $R=0,4\text{m}$, κινείται κατακόρυφα με την επίδραση μιας κατάλληλης κατακόρυφης δύναμης F , η οποία ασκείται στο άκρο A νήματος, το οποίο έχουμε τυλίξει, στο αυλάκι της. Η τροχαλία φέρει ομόκεντρη κυκλική προεξοχή ακτίνας $r=0,2\text{m}$ στην οποία έχουμε τυλίξει ένα δεύτερο νήμα, στο κάτω άκρο του οποίου έχουμε δέσει ένα σώμα Σ . Σε μια στιγμή t_1 , το άκρο A του νήματος, στο οποίο ασκείται η δύναμη F , έχει ταχύτητα μέτρου $v_A=1,8\text{m/s}$, με κατεύθυνση προς τα πάνω, ενώ το σώμα Σ ανεβαίνει επίσης κατακόρυφα, με ταχύτητα μέτρου $v_\Sigma=0,6\text{m/s}$.



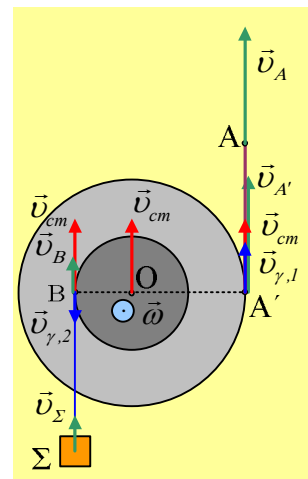
- i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του κέντρου O της τροχαλίας, καθώς και η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της, γύρω από νοητό οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το O .

Την παραπάνω στιγμή, το σημείο A έχει κατακόρυφη επιτάχυνση μέτρου $a_A=32\text{m/s}^2$, με φορά προς τα πάνω, ενώ το σώμα Σ , κατακόρυφη επιτάχυνση με φορά προς τα κάτω, μέτρου $a_\Sigma=13\text{m/s}^2$.

- ii) Να υπολογιστούν η επιτάχυνση του κέντρου O , καθώς και η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας.
 iii) Να βρεθεί ένα σημείο Γ , της οριζόντιας διαμέτρου της τροχαλίας, το οποίο την στιγμή t_1 έχει μηδενική κατακόρυφη επιτάχυνση. Στη συνέχεια να υπολογιστεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου Γ .

Απάντηση:

Προφανώς δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων τις κατευθύνσεις της ταχύτητας του κέντρου (και κέντρου μάζας) O , ούτε της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής. Αλλά (και χωρίς βλάβης της γενικότητας), με βάση την κατεύθυνση της δύναμης και της ροπής που δημιουργεί, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ταχύτητα του O είναι προς τα πάνω, ενώ η τροχαλία στρέφεται αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού, όπως στο σχήμα. Στη συνέχεια θεωρούμε την κίνηση της τροχαλίας ως σύνθετη, μια μεταφορική με ταχύτητα v_{cm} και μια στροφική, με γωνιακή ταχύτητα ω , γύρω από νοητό οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδο της τροχαλίας ο οποίος περνά από το κέντρο της O .



- i) Το άκρο A του πρώτου νήματος έχει την ίδια ταχύτητα, με όλα τα σημεία του νήματος, μεταξύ του A και του A' , που το νήμα συναντά την τροχαλία. Αλλά τότε για την ταχύτητά του θα έχουμε:

$$v_A = v_{A'} = v_{cm} + v_{\gamma,1} = v_{cm} + \omega R \quad (1)$$

Με την ίδια λογική το σώμα Σ έχει την ίδια ταχύτητα με όλα τα σημεία του δεύτερου νήματος, μέχρι και το σημείο B , οπότε:

$$v_\Sigma = v_B = v_{cm} - v_{\gamma,2} = v_{cm} - \omega r \quad (2)$$

Με αφαίρεση των εξισώσεων (1) και (2) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} v_A - v_\Sigma &= \omega R + \omega r \rightarrow \\ \omega &= \frac{v_A - v_\Sigma}{R + r} = \frac{1,8 - 0,6}{0,4 + 0,2} \text{ rad/s} = 2 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Και με αντικατάσταση στην (1):

$$v_{cm} = v_A - \omega R = 1,8 \text{ m/s} - 2 \cdot 0,4 \text{ m/s} = 1 \text{ m/s}$$

- ii) Δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο και για τις επιταχύνσεις των σημείων A' και B, αγνοώντας την κεντρομόλο επιτάχυνση κάθε σημείου, η οποία οφείλεται στην κυκλική του κίνηση, γύρω από το O, αφού κατευθύνονται προς το κέντρο O, κρατώντας μόνο την επιτάχυνση του κέντρου μάζας, λόγω μεταφορικής κίνησης και την επιτρόχια επιτάχυνση, λόγω στροφικής κίνησης. Υποθέτουμε ξανά ότι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας O είναι προς τα πάνω και ότι η γωνιακή επιτάχυνση έχει την ίδια κατεύθυνση με την γωνιακή ταχύτητα, όπως στο σχήμα. Έτσι για το σημείο A, θα έχουμε (δουλεύουμε με μέτρα):

$$\alpha_A = \alpha_{A'} = \alpha_{cm} + \alpha_{\epsilon\pi,1} = \alpha_{cm} + \alpha_{\gamma\omega\nu} R \quad (3)$$

Ενώ αφού η επιτάχυνση του σώματος Σ, είναι προς τα κάτω, θα έχουμε:

$$\alpha_\Sigma = \alpha_B = \alpha_{\epsilon\pi,2} - \alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} r - \alpha_{cm} \quad (4)$$

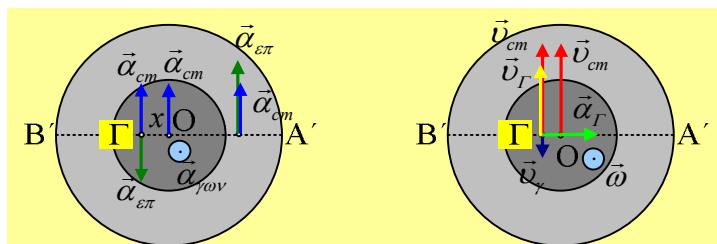
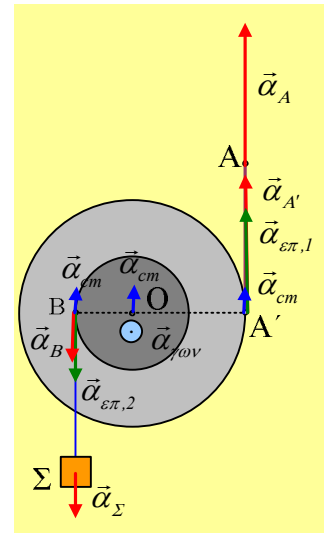
Με πρόσθεση των εξισώσεων (3) και (4) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \alpha_A + \alpha_\Sigma &= \alpha_{\gamma\omega\nu} R + \alpha_{\gamma\omega\nu} r \rightarrow \\ \alpha_{\gamma\omega\nu} &= \frac{\alpha_A + \alpha_\Sigma}{R + r} = \frac{32 + 13}{0,4 + 0,2} \text{ rad/s}^2 = 75 \text{ rad/s}^2 \end{aligned}$$

Και με αντικατάσταση στην (3):

$$\alpha_{cm} = \alpha_A - \alpha_{\gamma\omega\nu} R = 32 \text{ m/s}^2 - 75 \cdot 0,4 \text{ m/s}^2 = 2 \text{ m/s}^2$$

- iii) Έστω A'B' η οριζόντια διάμετρος της τροχαλίας την στιγμή t₁. Αν υποθέσουμε ότι το σημείο που ψάχνουμε βρίσκεται μεταξύ του O και του A', τότε η επιτάχυνση α_{cm} και η επιτρόχια επιτάχυνση, θα είχαν την ίδια κατεύθυνση, οπότε η κατακόρυφη επιτάχυνση είναι μη μηδενική. Έτσι το σημείο Γ, βρίσκεται στην ακτίνα OB', όπως στο πρώτο σχήμα, απέχοντας κατά x από το O.



$$\alpha_{\Gamma,y} = 0 \rightarrow \alpha_{cm} = \alpha_{\varepsilon\pi} \rightarrow \alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} x \rightarrow$$

$$x = \frac{\alpha_{cm}}{\alpha_{\gamma\omega\nu}} = \frac{2}{75} m$$

Αλλά τότε για την ταχύτητα του σημείου Γ (βλέπε δεξιό σχήμα), θα έχουμε:

$$v_{\Gamma} = v_{cm} - \omega x = 1 m/s - 2 \cdot \frac{2}{75} m/s = \frac{71}{75} m/s$$

Ενώ το σημείο Γ θα έχει κεντρομόλο επιτάχυνση, εξαιτίας της κυκλικής του κίνησης γύρω από το Ο, όπως στο σχήμα, με μέτρο:

$$\alpha_{\Gamma} = \alpha_{\kappa} = \omega^2 x = 2^2 \cdot \frac{2}{75} m/s^2 = \frac{8}{75} m/s^2$$

dmargaris@gmail.com