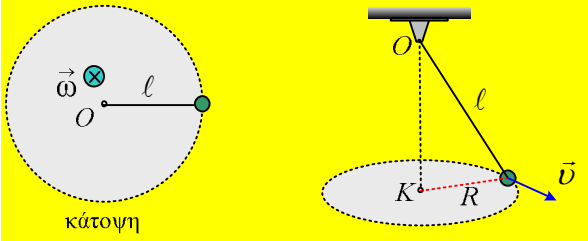
Η τάση του νήματος σε δύο ΟΚΚ

Μια μικρή σφαίρα είναι δεμένη στο άκρο αβαρούς και μη εκτατού νήματος, μήκους l=2m, το άλλο άκρο Ο του οποίου στερεώνεται σε ένα σημείο λείου οριζοντίου επιπέδου. Η σφαίρα τίθεται σε κίνηση, με κινητική ενέργεια K=0,9J, διαγράφοντας έναν οριζόντιο κύκλο και στο πρώτο σχήμα (σε κάτοψη), έχει σχεδιαστεί το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας του σώματος.



i) Να σχεδιάσετε το διάνυσμα της γραμμικής ταχύτητας της σφαίρας, στην θέση του σχήματος.

ii) Να υπολογίσετε την τάση του νήματος.

iii) Δένουμε το άκρο Ο του νήματος στο ταβάνι του δωματίου μας και θέτουμε ξανά σε κυκλική κίνηση τη σφαίρα με την ίδια κινητική ενέργεια, οπότε τώρα η σφαίρα διαγράφει οριζόντιο κύκλο κέντρου Κ ακτίνας R=1,2m (το νήμα διαγράφει την πλευρική επιφάνεια ενός κώνου), όπως στο δεύτερο σχήμα.

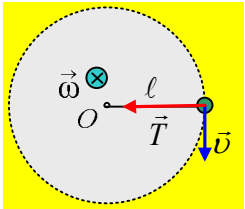
α) Να σχεδιάσετε πάνω στο σχήμα το διάνυσμα τη γωνιακής ταχύτητας της σφαίρας.

β) Να βρεθεί το μέτρο της κεντρομόλου δύναμης που ασκείται στη σφαίρα.

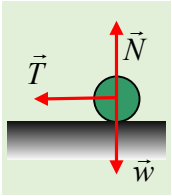
γ) Να υπολογιστεί η μάζα της σφαίρας, καθώς και η γωνιακή ταχύτητα περιφοράς της.

Απάντηση:

i) Με βάση τον κανόνα του δεξιού χεριού, βάζοντας τον αντίχειρα κάθετα στο επίπεδο της σελίδας, με φορά προς τα μέσα (όπως η $\vec{\omega}$), τα ενωμένα δάκτυλα δείχνουν τη σφαίρα να περιφέρεται με την φορά των δεικτών του ρολογιού, οπότε η γραμμική ταχύτητα, εφαπτόμενη του κύκλου, θα έχει την κατεύθυνση που δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



ii) Στην κατακόρυφη διεύθυνση η σφαίρα δέχεται το βάρος και την κάθετη αντίδραση του επιπέδου, οπότε $\Sigma F_y=0$, αφού στην διεύθυνση αυτή ισορροπεί. Έτσι η μόνη οριζόντια δύναμη που ασκείται στην σφαίρα, είναι η τάση του νήματος, η οποία κατευθύνεται προς το κέντρο Ο της κυκλικής τροχιάς (πρώτο σχήμα), παίζοντας το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης, με μέτρο:



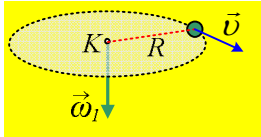
$$T = F_k = m\frac{\upsilon^2}{R}$$

Όμως η κινητική ενέργεια της σφαίρας είναι ίση με:

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \rightarrow m\upsilon^2 = 2K \rightarrow$$

$$T = F_k = \frac{2K}{l} = \frac{2 \cdot 0{,}9}{2} N = 0{,}9N$$

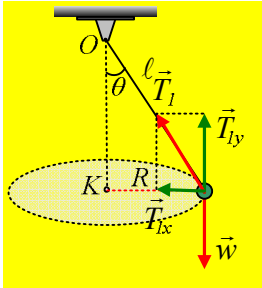
iii) α) Εφαρμόζοντας ξανά τον κανόνα του δεξιού χεριού, βρίσκουμε τώρα ότι η γωνιακή ταχύτητα είναι κάθετη στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς, στο κέντρο Κ, με φορά προς τα κάτω, όπως στο διπλανό σχήμα.



β) Η κεντρομόλος δύναμη θα κατευθύνεται προς το κέντρο Κ της κυκλικής τροχιάς και θα έχει μέτρο:

$$F_k = m\frac{\upsilon^2}{R} = \frac{2K}{R} = \frac{2 \cdot 0{,}9}{1{,}2} N = 1{,}5N.$$

γ) Στο διπλανό σχήμα, μετακινήσαμε λίγο την θέση της σφαίρας, ώστε το επίπεδο ΟΚ-σφαίρα να συμπέσει με το επίπεδο της σελίδας, για σχεδιαστικούς λόγους. Στη θέση αυτή σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα και αναλύουμε την τάση T_1 του νήματος σε δυο συνιστώσες, μια οριζόντια και μια κατακόρυφη. Αλλά τότε η συνιστώσα T_{1x} είναι η παραπάνω κεντρομόλος δύναμη που υπολογίσαμε, οπότε:



$$T_{1x} = F_k = T_1 \cdot \eta\mu\theta = T_1 \cdot \frac{R}{l} \rightarrow$$

$$T_1 = \frac{F_k l}{R} = \frac{1{,}5 \cdot 2}{1{,}2} N = 2{,}5N$$

Ενώ:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow T_{1y} = mg \rightarrow T_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = mg$$

Όμως για την γωνία θ έχουμε:

$$(OK) = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{2^2 - 1{,}2^2} m = \sqrt{4 - 1{,}44} m = 1{,}6m \rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{(OK)}{l} = \frac{1{,}6m}{2m} = 0{,}8m$$

$$m = \frac{T_1 \sigma\upsilon\nu\theta}{g} = \frac{2{,}5 \cdot 0{,}8}{10} kg = 0{,}2kg$$

Εξάλλου, από την κινητική ενέργεια της σφαίρας παίρνουμε:

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m(\omega_1 R)^2 \rightarrow$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2K}{mR^2}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2K}{m}} = \frac{1}{1{,}2}\sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}9}{0{,}2}} \; rad/_s = 2{,}5 \, rad/_s$$

dmargaris@gmail.com