ΦΥΣΙΚΗ Ι

ΤΜΗΜΑ Α'
Ε. Στυλιάρης
(Με ιδέες και υλικό από παλαιότερες διαφάνειες του κ. Καραμπαρμπούνη)
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ, 2015-2016

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

- Πολικές Συντεταγμένες
- Κυλινδρικές Συντεταγμένες
- Σφαιρικές Συντεταγμένες
- Στοιχειώδεις Όγκοι

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ

- Ιδιότητες της Παραγώγου
- Συνάρτηση Πολλών Μεταβλητών - Μερική Παράγωγος

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

- Καμπύλες και Ταχύτητα
- Παράγωγος κατά Κατεύθυνση
- Παραγώγιση στον Τρισδιάστατο Χώρο – Ο Τελεστής ∇

ΦΥΣΙΚΗ Ι

ΤΜΗΜΑ Α’

Ε. Στυλιάρης

(Με ιδέες και υλικό από παλαιότερες διαφάνειες του κ. Καραμπαρμπούνη)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ, 2015-2016

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

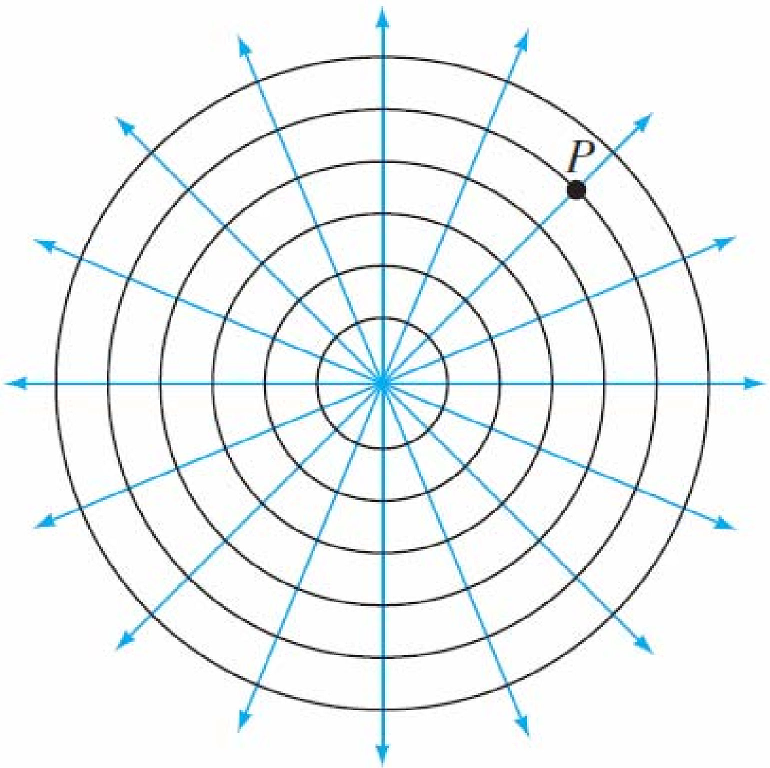
Τα εισαγωγικά κεφάλαια των παρακάτω βιβλίων αποτελούν μέρος μόνο της πλούσιας διαθέσιμης βιβλιογραφίας που υπάρχει για τα θέματα που θίγονται στα επόμενα.

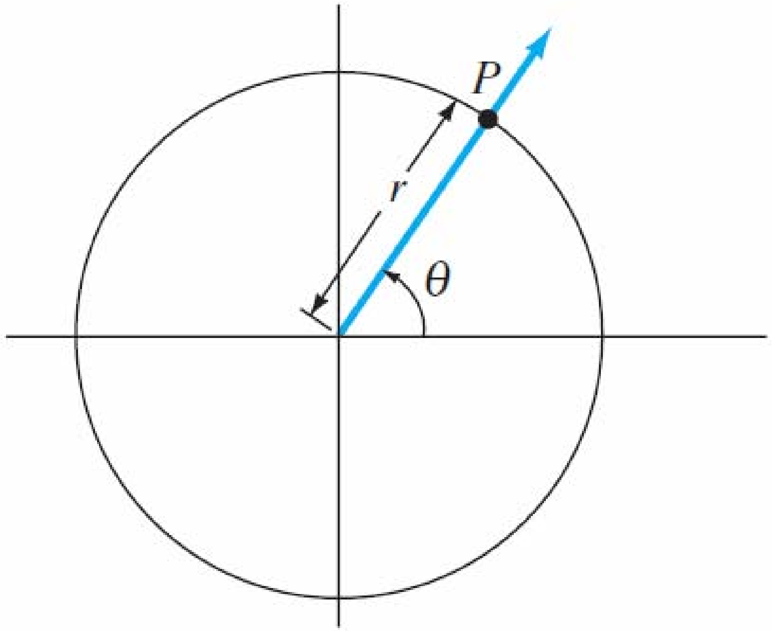
J. Mardsen & A. Tromba: *Διανυσματικός Λογισμός (Vector Calculus)*, 3rd Edition, Απόδοση στα Ελληνικά Α. Γιαννόπουλος, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης (1992) ISBN: 978-9607309457.

Susan J. Colley: *Vector Calculus*, Pearson 4th Edition (2011) ISBN: 978-0321780652.

Adrian Banner: *The Calculus Lifesaver*, Princeton University Press, 1st Edition (2007) ISBN: 978-0691130880.

Πολικές Συντεταγμένες Επιπέδου





Το σημείο P του επιπέδου προσδιορίζεται μέσω της ακτίνας r και της γωνίας θ: P(r,θ)

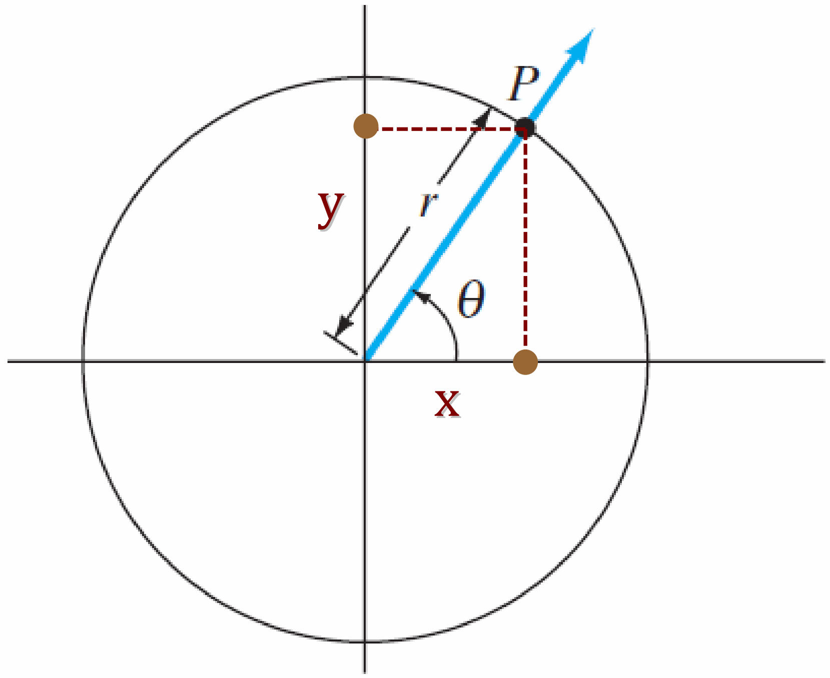
$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

όπου

$$0 \le r < \infty \qquad 0 \le \theta < 2\pi$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Σχέση Πολικών & Καρτεσιανών Συντεταγμένων



$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}}$$

όπου

$$\boxed{\begin{aligned} 0 \le r &< \infty \\ 0 \le \theta &< 2\pi \end{aligned}}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \mathrm{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}}$$

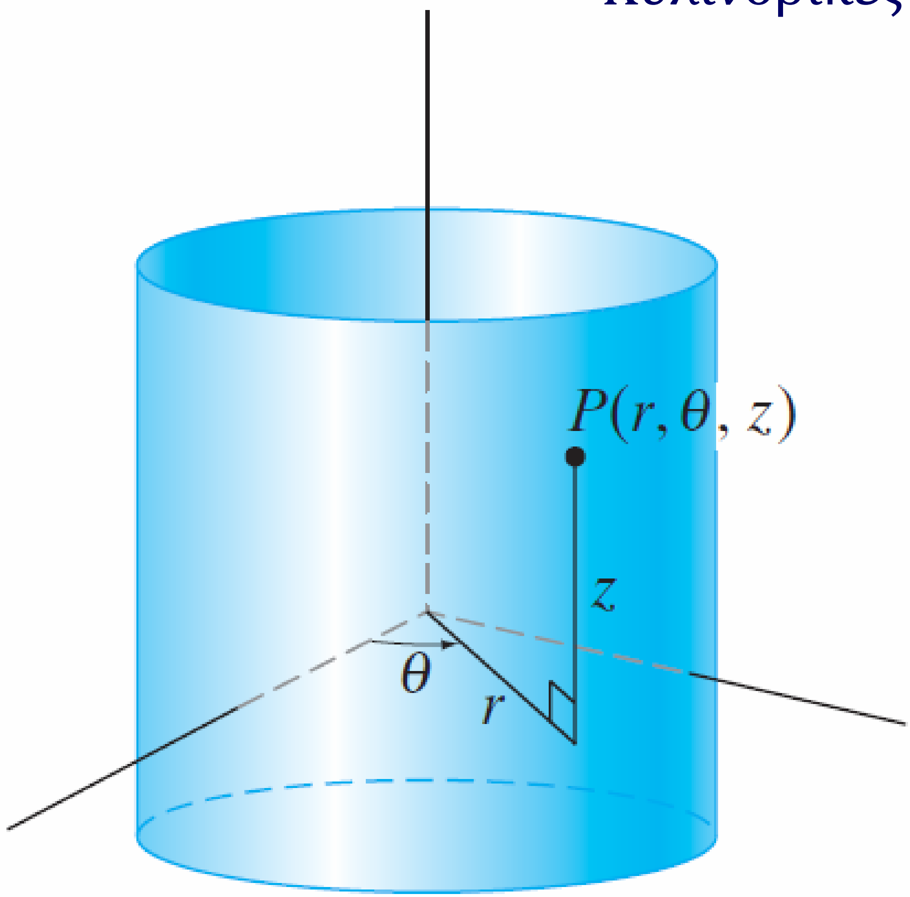
$$dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta$$

$$dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$$

Ο γεωμετρικός τόπος r=const.
στις πολικές συντεταγμένες
είναι ένας κύκλος.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Κυλινδρικές Συντεταγμένες



Ο γεωμετρικός τόπος r=const. στις κυλινδρικές συντεταγμένες είναι η επιφάνεια κυλίνδρου.

Κυλινδρικές συντεταγμένες σε Καρτεσιανές

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = z$$

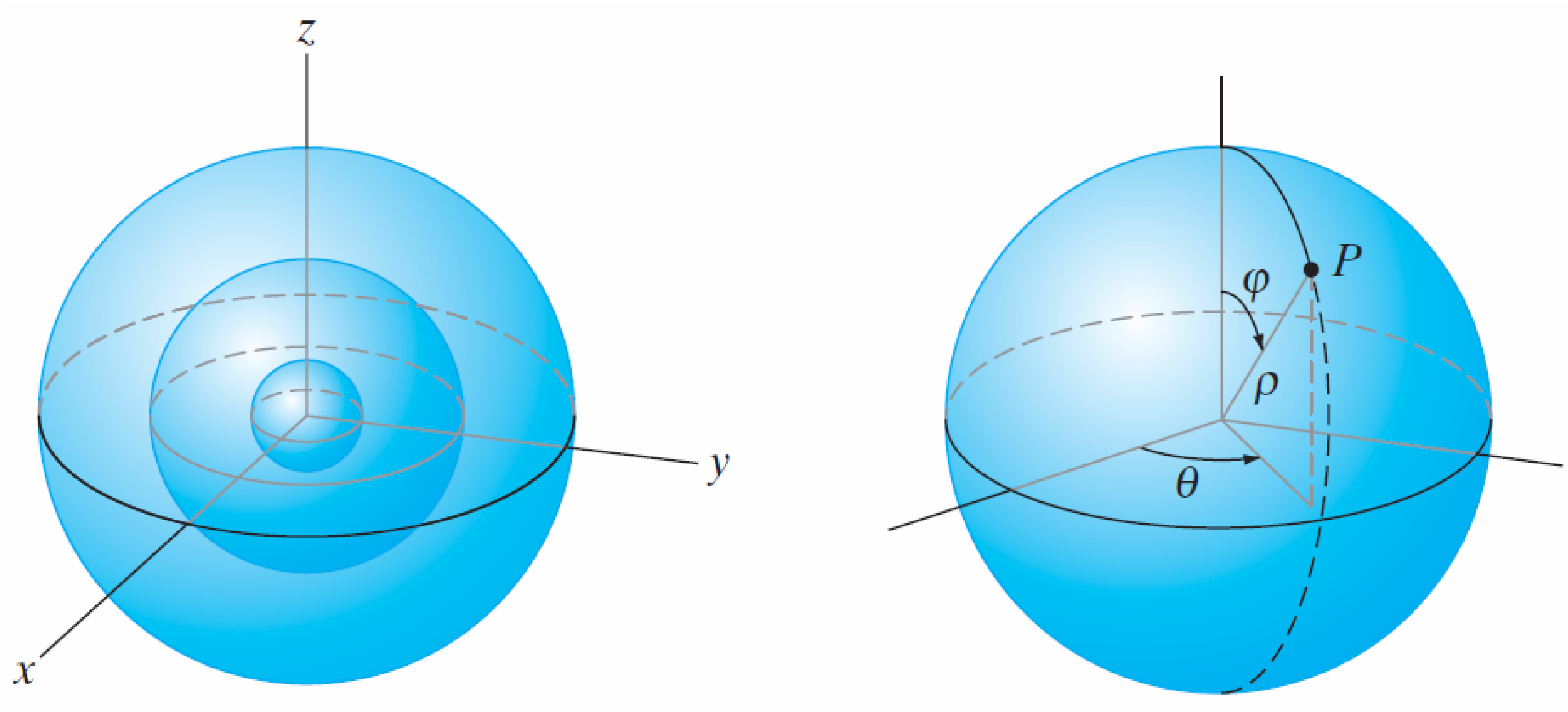
Καρτεσιανές συντεταγμένες σε Κυλινδρικές

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$z = z$$

Το σημείο P του χώρου προσδιορίζεται μέσω της ακτίνας r, της γωνίας θ και της καρτεσιανής συντεταγμένης z: **P(r, θ, z)**

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Σφαιρικές Συντεταγμένες



Ο γεωμετρικός τόπος ρ=const. στις σφαιρικές συντεταγμένες είναι η επιφάνεια σφαίρας.

$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta$$
$$y = \rho \sin\varphi \sin\theta$$
$$z = \rho \cos\varphi$$

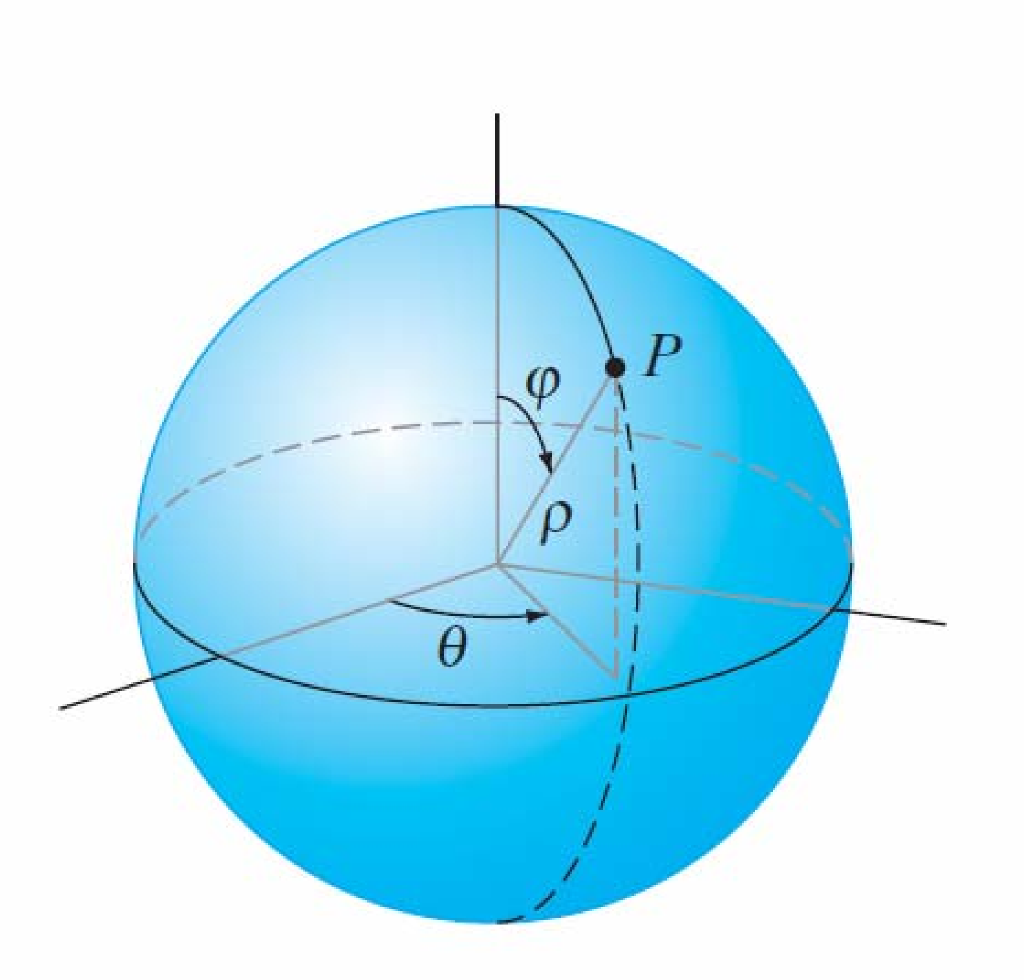
όπου

$$0 \le \rho < \infty$$
$$0 \le \theta < 2\pi$$
$$0 \le \varphi \le \pi$$

Το σημείο P του χώρου προσδιορίζεται μέσω της ακτίνας ρ και των γωνιών θ και φ:
P(ρ, θ, φ)

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Σφαιρικές Συντεταγμένες



Σφαιρικές συντεταγμένες σε Καρτεσιανές

$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta$$

$$y = \rho \sin\varphi \sin\theta$$

$$z = \rho \cos\varphi$$

Καρτεσιανές συντεταγμένες σε Σφαιρικές

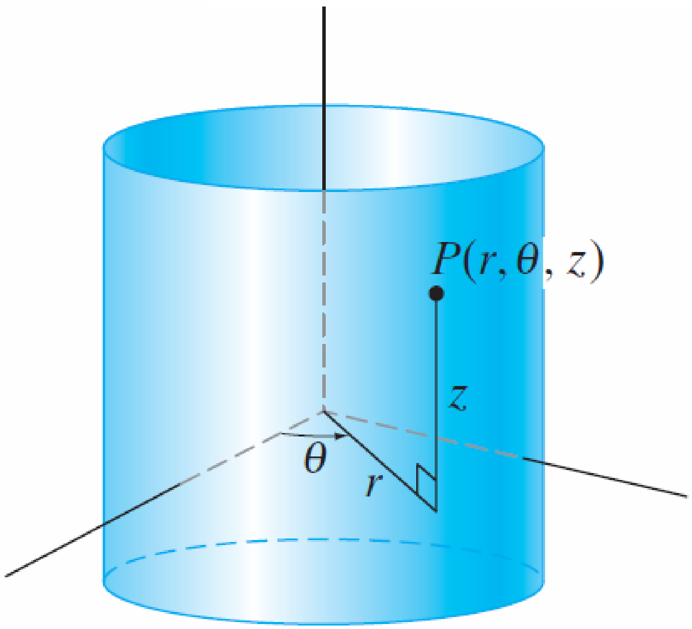
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\varphi = \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) = \operatorname{acos}(z/\rho)$$

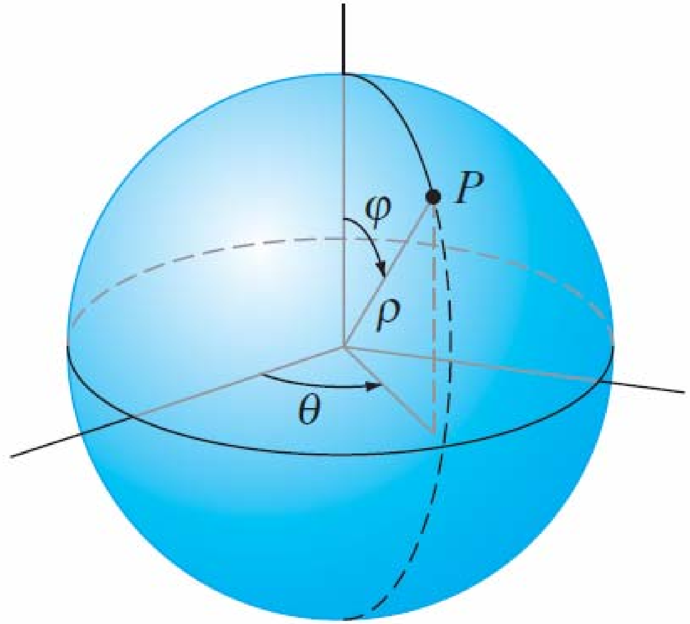
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Σχέση Κυλινδρικών □ Σφαιρικών Συντεταγμένων



$P(r, \theta, z)$

$$r = \rho \sin\varphi$$
$$\theta = \theta$$
$$z = \rho \cos\varphi$$



$P(\rho, \theta, \varphi)$

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$$
$$\theta = \theta$$
$$\varphi = \operatorname{atan}\left(r/z \right)$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Παράδειγμα

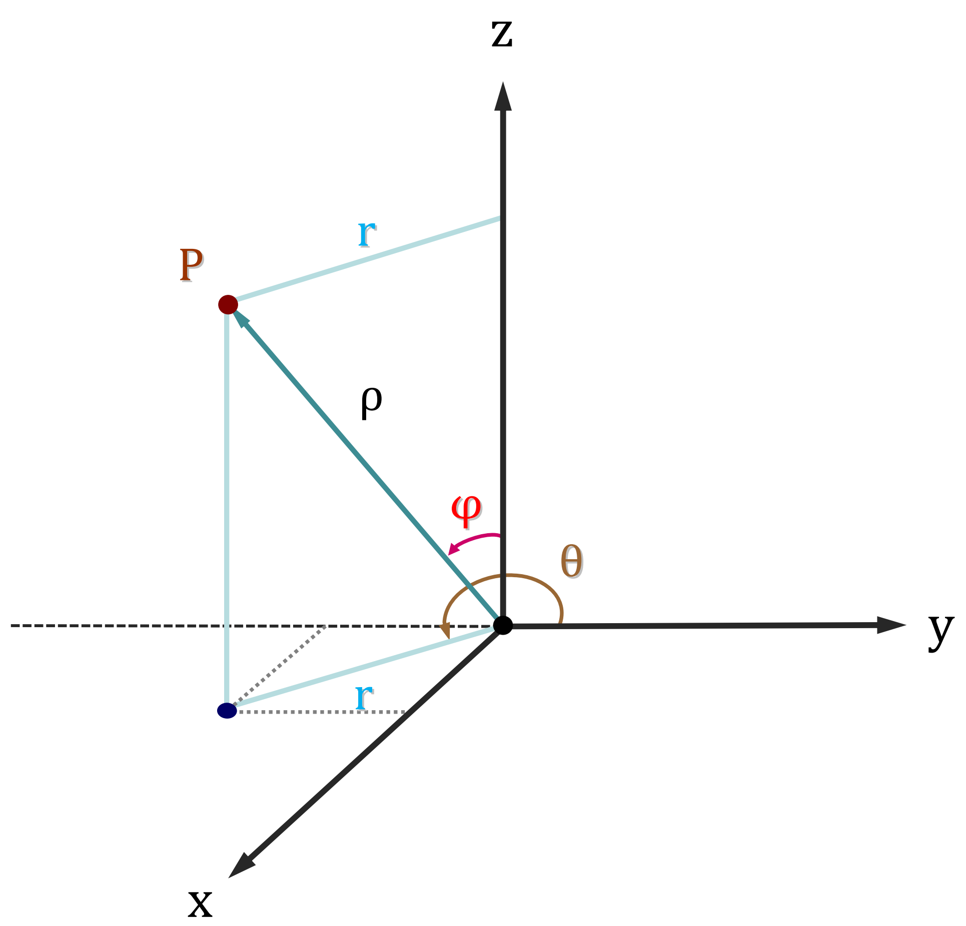
Το σημείο του χώρου P με Καρτεσιανές Συντεταγμένες (+1, -1, +1) έχει:

Κυλινδρικές Συντεταγμένες

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$
$$\theta = \operatorname{atan}(-1/1) = {}^{7\pi}\!/_{4}$$
$$z = +1$$

Σφαιρικές Συντεταγμένες

$$\rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$
$$\theta = \operatorname{atan}(-1/1) = {}^{7\pi}\!/_{4}$$
$$z = \operatorname{acos}(1/\sqrt{3}) \approx 54.7^{o}$$



ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ

Παράγωγος Συνάρτησης Μιας Μεταβλητής

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Μερική Παράγωγος Συνάρτησης Πολλών Μεταβλητών

Εάν η συνάρτηση έχει περισσότερες μεταβλητές $\{x_1, x_2, \ldots x_i \ldots x_n\}$, τότε η μερική παράγωγος της συνάρτησης αυτής ως προς μια μεταβλητή x_i ορίζεται ως το όριο:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots x_i + \Delta x \ldots x_n) - f(x_1, x_2, \ldots x_i \ldots x_n)}{\Delta x}$$

Δηλαδή, ελέγχεται η μεταβολή της συνάρτησης f μόνο ως προς την μεταβλητή x_i , θεωρώντας όλες τις άλλες μεταβλητές της σταθερές.

Παράδειγμα

$$f(x, y) = x^2 y + y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \ , \ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2$$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Παράγωγος Σύνθετης Συνάρτησης Πολλών Μεταβητών

Η παράγωγος της σύνθετης συνάρτησης f (x , y) ως προς την μεταβλητή t, όταν x=x(t) και y=y(t) δίνεται από τον κανόνα της αλυσίδας:

$$\frac{df}{dt} = \frac{df(x(t), y(t))}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

Αντίστοιχα το διαφορικό df δίνεται από τη σχέση:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy$$

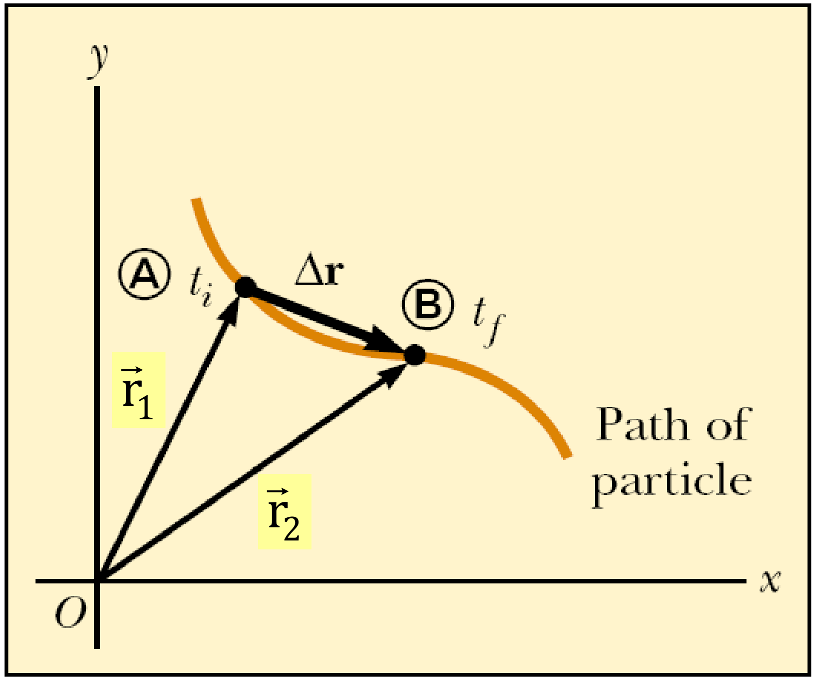
Παράδειγμα

$$\left\{\begin{array}{l} f(x,y) = x^2 y \\ x(t) = t^2 \\ y(t) = t+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) = 2xy\left(\frac{dx}{dt}\right) + x^2\left(\frac{dy}{dt}\right) = 2t^2(t+1)2t + t^4 = 5t^4 + 4t^3$$

<u>Επαλήθευση</u>

$$f(t) = (t^2)^2(t+1) = t^5 + t^4 \Rightarrow \frac{df}{dt} = 5t^4 + 4t^3$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ



Διάνυσμα Θέσης

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Μετατόπιση

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \left(x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}\right) - \left(x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}\right)$$

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j} + \Delta z\,\hat{k}$$

Μέση Ταχύτητα

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j} + \Delta z\,\hat{k}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k}$$

Ταχύτητα

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ

Ταχύτητα

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Μέση Επιτάχυνση

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

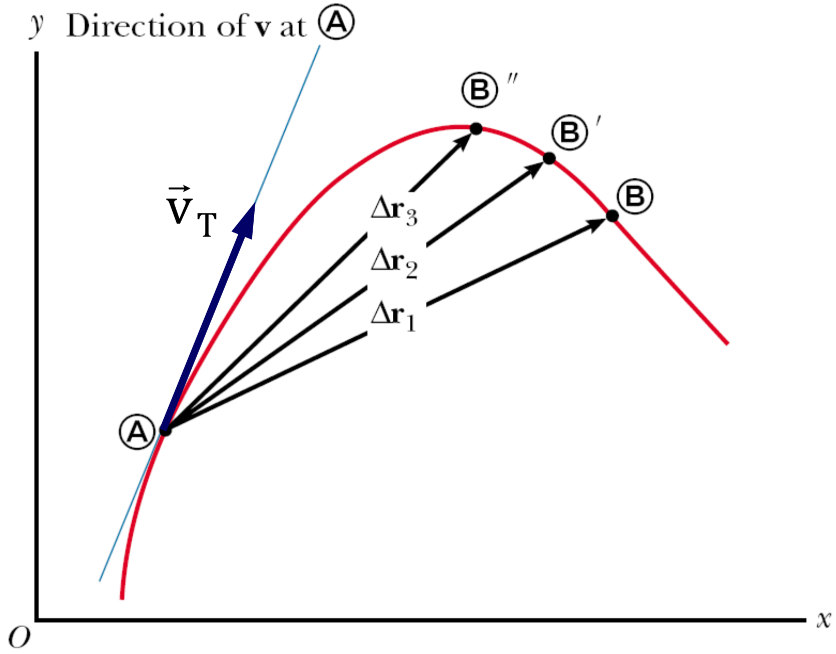
Επιτάχυνση

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}) = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}$$

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ



Κατά τη κίνηση του σώματος από το Α στο Β η μετατόπιση Δs πάνω στην καμπύλη δίνεται από το τόξο ΑΒ.

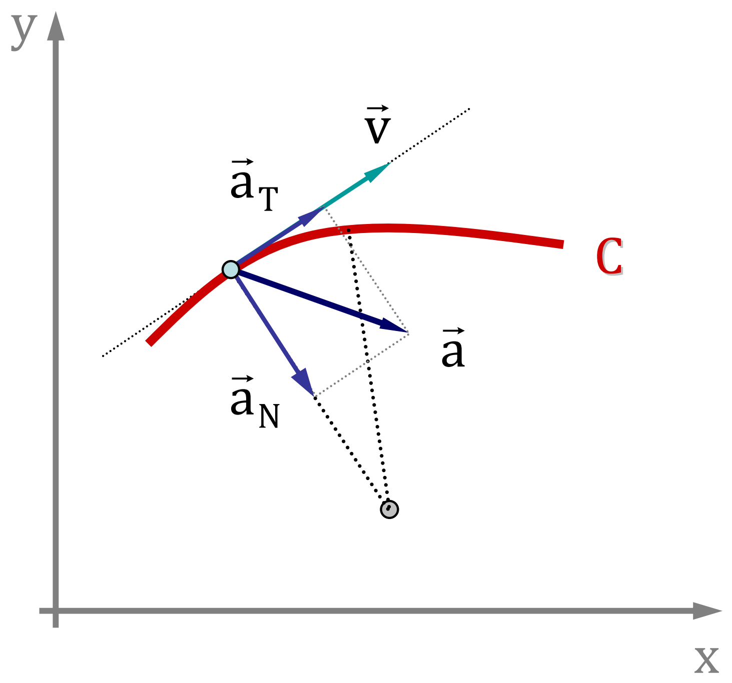
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \left(\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right)\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$$

Στο όριο αυτό το Δs γίνεται ίσο με το μέτρο Δr, οπότε ο πρώτος όρος αντιπροσωπεύει ένα μοναδιαίο διάνυσμα, εφαπτόμενο στη διαδρομή (καμπύλη) που περιγράφει την κίνηση του σώματος.

$$\left.\begin{aligned}\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}_T \\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} &= \frac{ds}{dt} = v\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{u}_T\frac{ds}{dt} = \vec{u}_T v}$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ



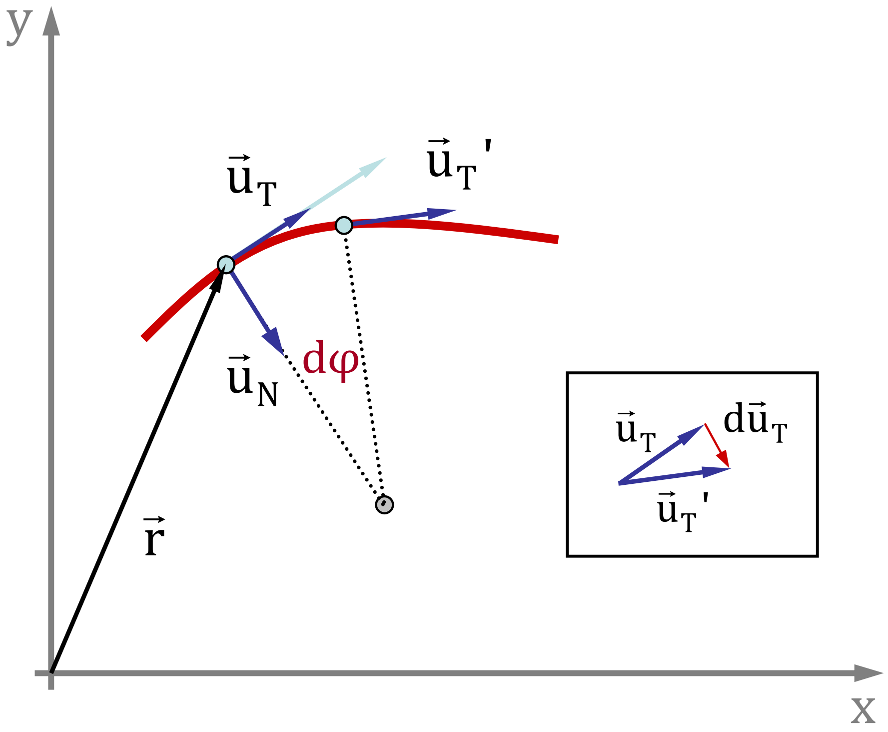
Σώμα κινείται στην τροχιά C και τη χρονική στιγμή t έχει ταχύτητα **v** και επιτάχυνση **a**. Η επιτάχυνση a έχει πάντα κατεύθυνση προς τα κοίλα της τροχιάς.

Μπορούμε να αναλύσουμε την επιτάχυνση σε δύο κάθετες συνιστώσες: Σε μια εφαπτομενική στην τροχιά και σε μια κάθετη συνιστώσα.

$\boxed{\vec{a}_T}$ Εφαπτομενική Επιτάχυνση: Αλλαγή στο μέτρο της ταχύτητας

$\boxed{\vec{a}_N}$ Κάθετη Επιτάχυνση: Αλλαγή στη διεύθυνση της ταχύτητας

ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ



$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{u}_T v) = \vec{u}_T \frac{dv}{dt} + \frac{d\vec{u}_T}{dt} v}$$

Όταν η τροχιά δεν είναι ευθύγραμμη, τότε το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u_T}$ αλλάζει κατεύθυνση, οπότε χρειάζεται να υπολογισθεί η παράγωγός του ως προς τον χρόνο.

Στο αντίστοιχο κεφάλαιο της *Κινηματικής* θα αποδειχθεί πως $\boxed{d\vec{u}_T = \vec{u}_N \frac{v}{\rho}}$

όπου το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u_N}$ είναι κάθετο στην εφαπτομενική διεύθυνση της τροχιάς και ρ η ακτίνα καμπυλότητας.

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΣΤΟΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟ

Η έννοια της παραγώγισης ενός βαθμωτού ή διανυσματικού πεδίου στον χώρο διευκολύνεται με την εισαγωγή του τελεστή ∇ (*Ανάδελτα* ή *Nabla*), ο οποίος ορίζεται ως:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

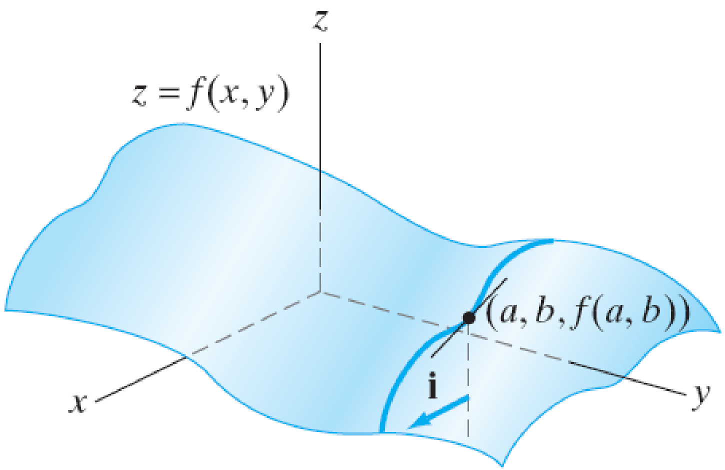
Διακρίνονται οι τρεις παρακάτω περιπτώσεις, ανάλογα με το εάν το πεδίο (η συνάρτηση) στο οποίο ο τελεστής αυτός επιδρά είναι βαθμωτό ή διανυσματικό:

ΟΝΟΜΑΣΙΑ	ΟΡΙΣΜΑ	ΤΡΟΠΟΣ ΔΡΑΣΗΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
Κλίση (grad)	Βαθμωτό	$\vec{\nabla} f$	Διανυσματικό
Απόκλιση (div)	Διανυσματικό	$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$	Βαθμωτό
Στροβιλισμός (curl)	Διανυσματικό	$\vec{\nabla} \times \vec{F}$	Διανυσματικό

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΒΑΘΜΩΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Ως κλίση ενός βαθμωτού πεδίου (συνάρτησης) f(x,y,z) ορίζεται ως το διανυσματικό πεδίο:

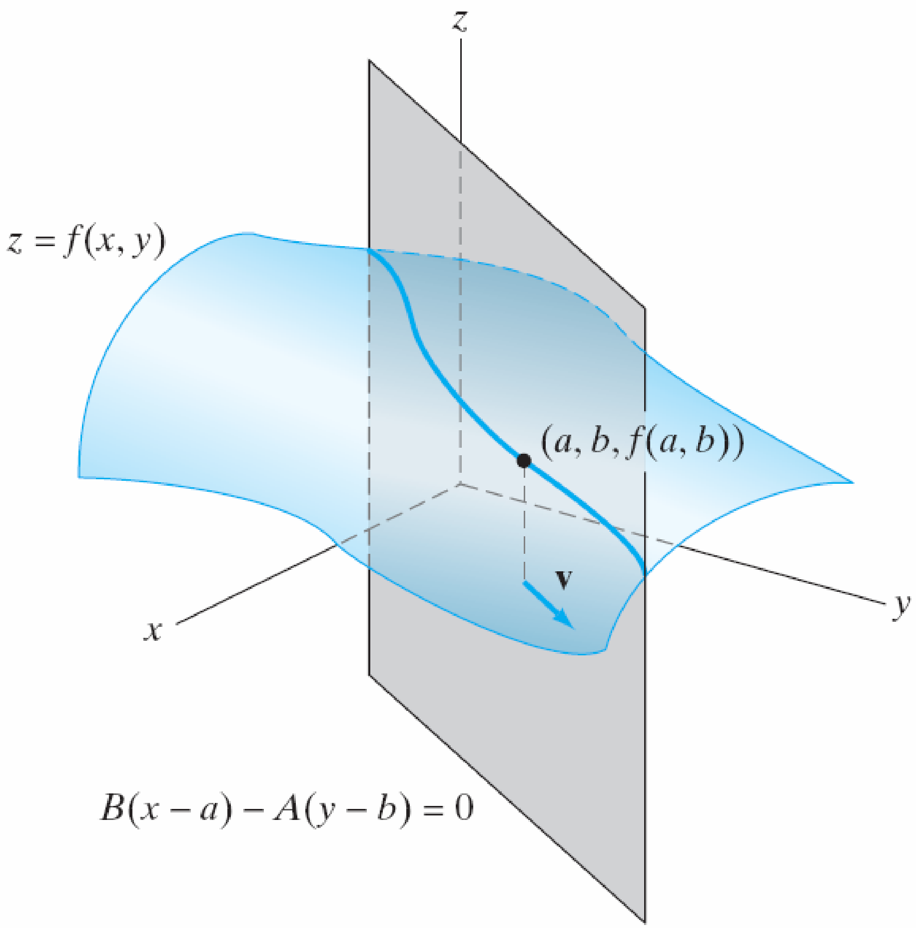
$$\boxed{\mathrm{grad}\, f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}}$$



*Το **gradf** δίνει την **παράγωγο** του βαθμωτού πεδίου **ανά κατεύθυνση**. Προφανώς το εσωτερικό γινόμενο*

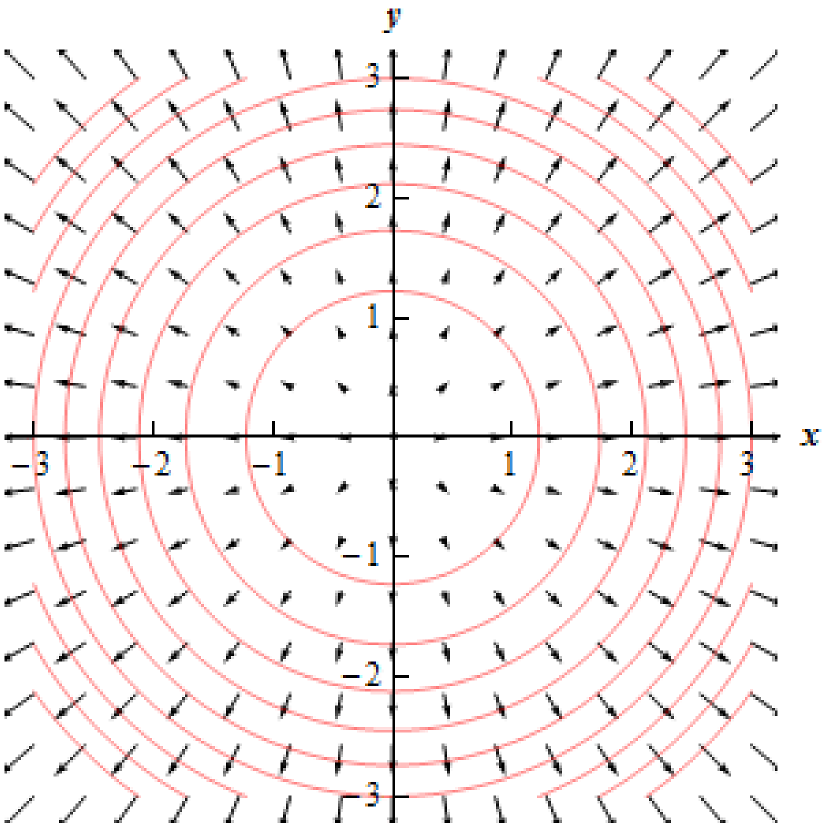
$$\boxed{\left(\vec{\nabla} f\right)\cdot \vec{e}}$$

*είναι το μέγεθος της παραγώγου (μεταβολή του πεδίου) ως προς την κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος **e**.*



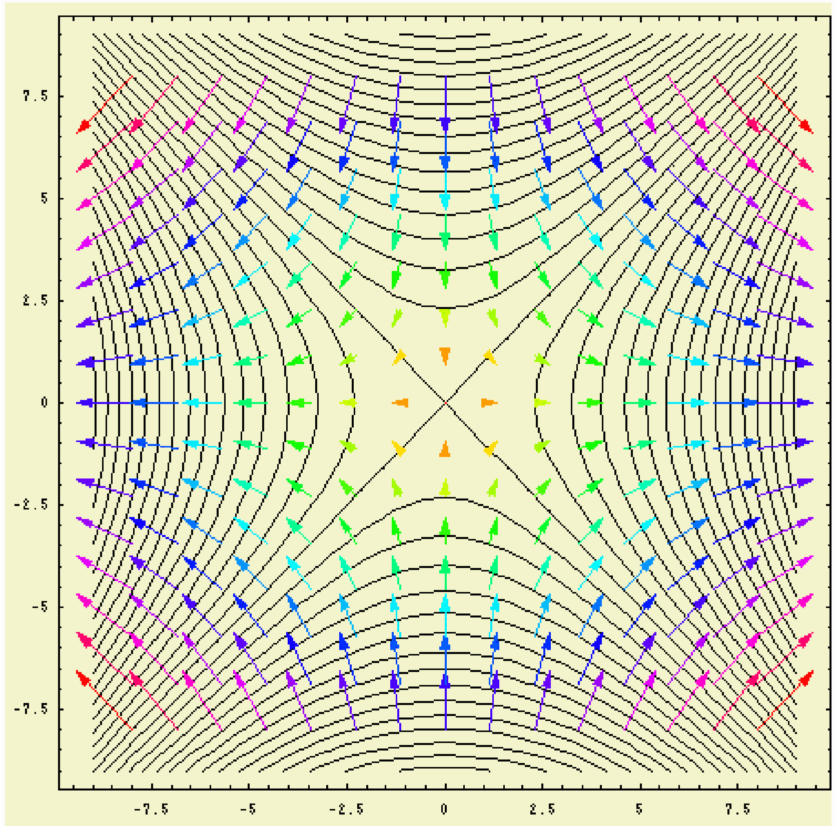
ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΒΑΘΜΩΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

$$\text{grad}\, f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$



$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\text{grad} f = \vec{\nabla} f = 2x\hat{i} + 2y\hat{j}$$

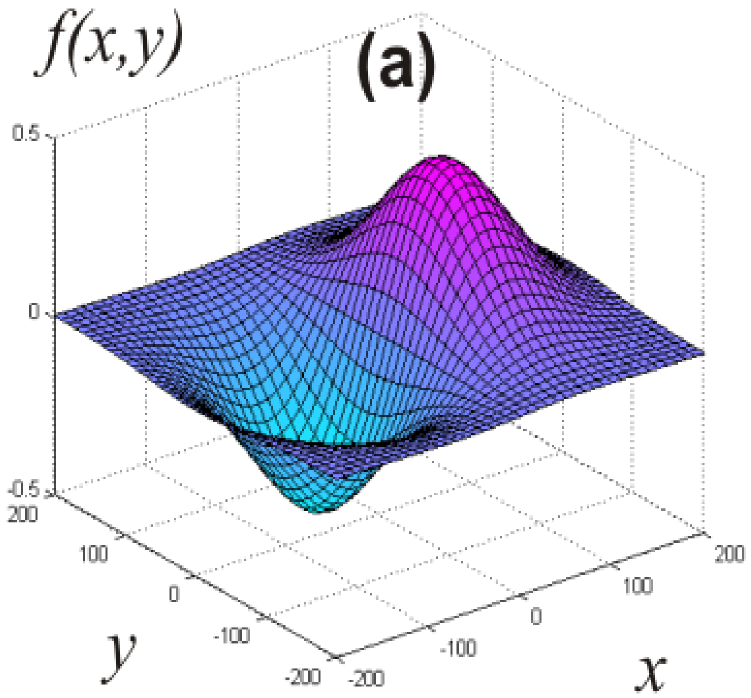


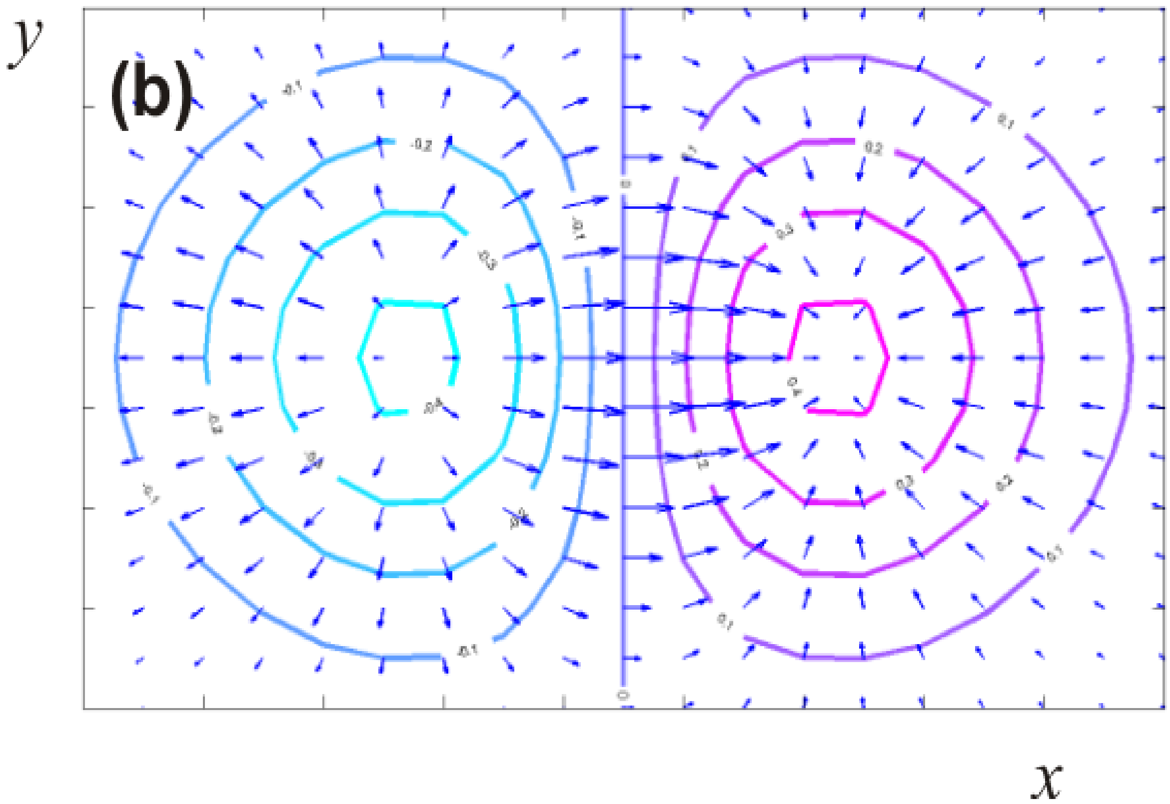
$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

$$\text{grad} f = \vec{\nabla} f = 2x\hat{i} - 2y\hat{j}$$

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΒΑΘΜΩΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

$$\mathrm{grad}\, f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

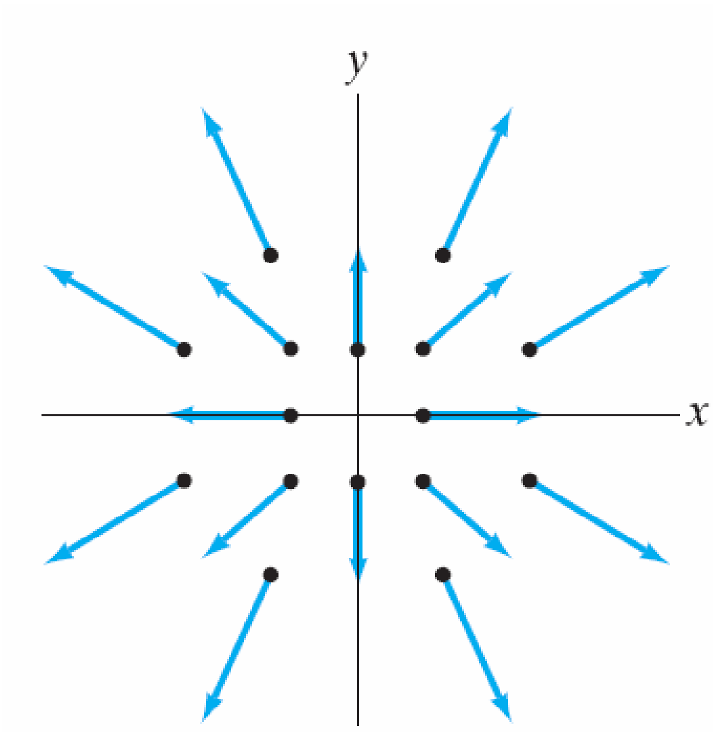




ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

$$\mathrm{div}\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}\right) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$



Παράδειγμα

$$\vec{F} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} \;\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = 1 + 1 = 2$$

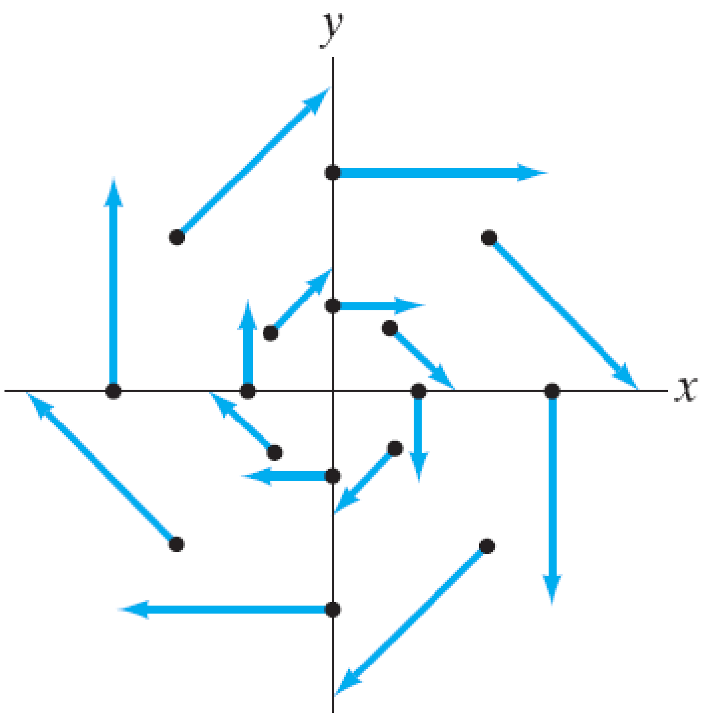
Η *απόκλιση (divergence)* ενός διανυσματικού πεδίου είναι βαθμωτό μέγεθος. Προσομοιώνει την ροή υποθετικού ρευστού στο εν λόγω σημείο του χώρου, υποθέτοντας πως το διανυσματικό πεδίο στο οποίο επιδρά εκφράζει την ταχύτητα του ρευστού.

Στο παράδειγμα αυτό έχουμε σταθερή (θετική) ροή (εκροή) σε κάθε σημείο του χώρου.

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

$$\mathrm{div}\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}\right) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$



Παράδειγμα

$$\vec{F} = y\,\hat{i} - x\,\hat{j} \;\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0 + 0 = 0$$

Η *απόκλιση (divergence)* ενός διανυσματικού πεδίου είναι βαθμωτό μέγεθος. Προσομοιώνει την ροή υποθετικού ρευστού στο εν λόγω σημείο του χώρου, υποθέτοντας πως το διανυσματικό πεδίο στο οποίο επιδρά εκφράζει την ταχύτητα του ρευστού.

Στο παράδειγμα αυτό έχουμε μηδενική ροή σε κάθε σημείο του χώρου (το ρευστό μόνο στροβιλίζεται).

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

$$\mathrm{curl}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\times\left(F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}\right) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Η *στροβιλισμός (curl)* ενός διανυσματικού πεδίου είναι διανυσματικό μέγεθος. Δείχνει τον στροβιλισμό υποθετικού ρευστού στο εν λόγω σημείο του χώρου, υποθέτοντας πως το διανυσματικό πεδίο στο οποίο επιδρά εκφράζει την ταχύτητα του ρευστού.

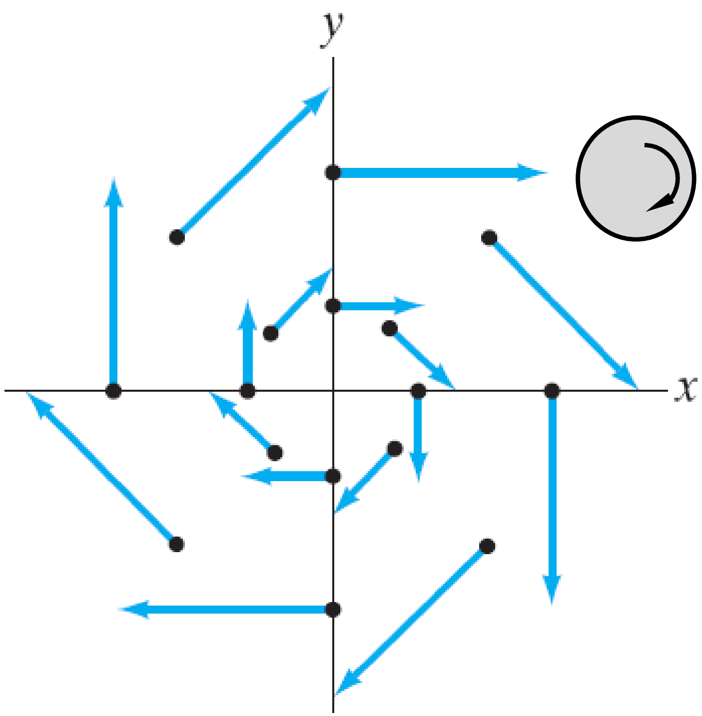
Όταν ένα διανυσματικό πεδίο έχει μηδενικό στροβιλισμό αποκαλείται αστρόβιλο πεδίο.

Ένας πρακτικός τρόπος για να βρεθεί ο στροβιλισμός ενός πεδίου σε κάποιο σημείο του είναι να μελετηθεί η στροφική κίνηση υποθετικού επίπεδου δίσκου φερόμενου στο σημείο αυτό.

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

$$\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}}$$

$$\boxed{\mathrm{curl}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\times\left(F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}\right) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}}$$



Παράδειγμα

$$\vec{F} = y\,\hat{i} - x\,\hat{j}$$

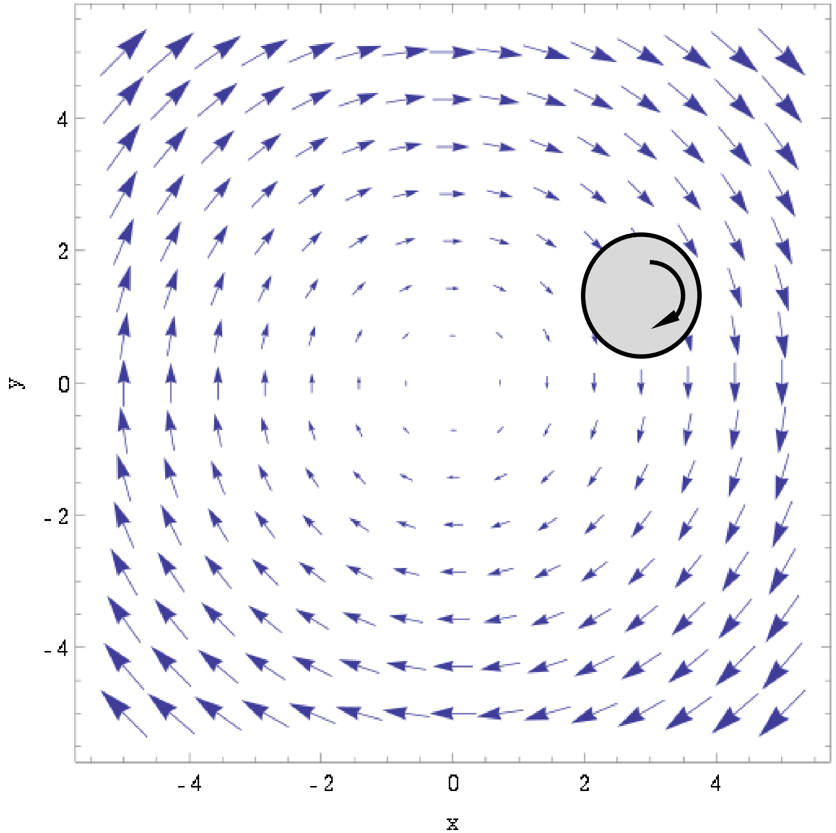
$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = -2\hat{k}$$

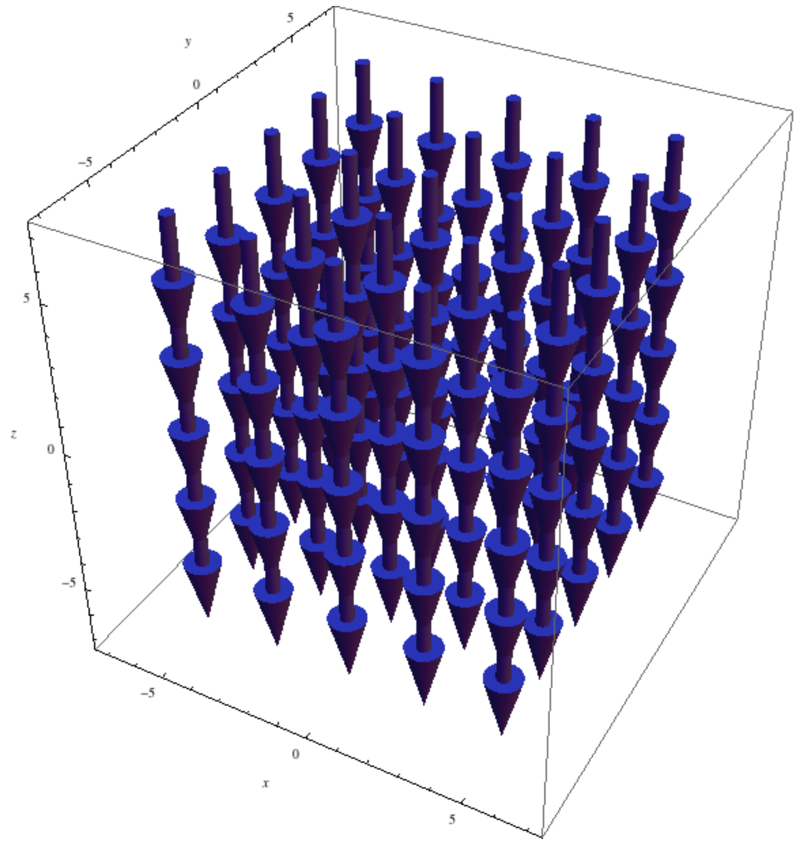
ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

$$\mathrm{curl}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\times\left(F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}\right) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{F} = y\,\hat{i} - x\,\hat{j}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = -2\hat{k}$$



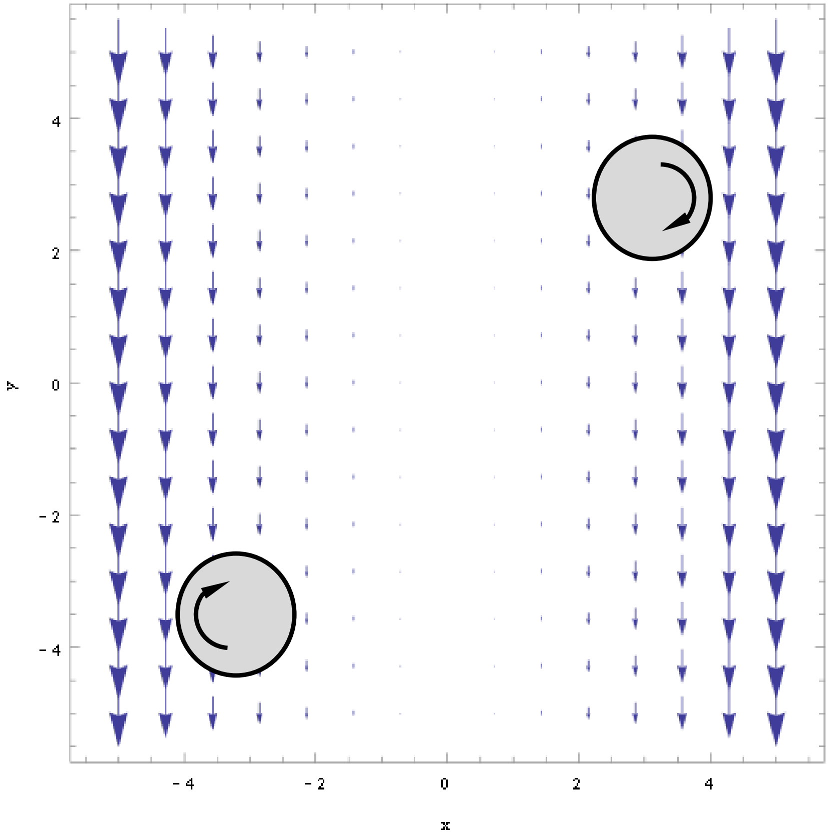


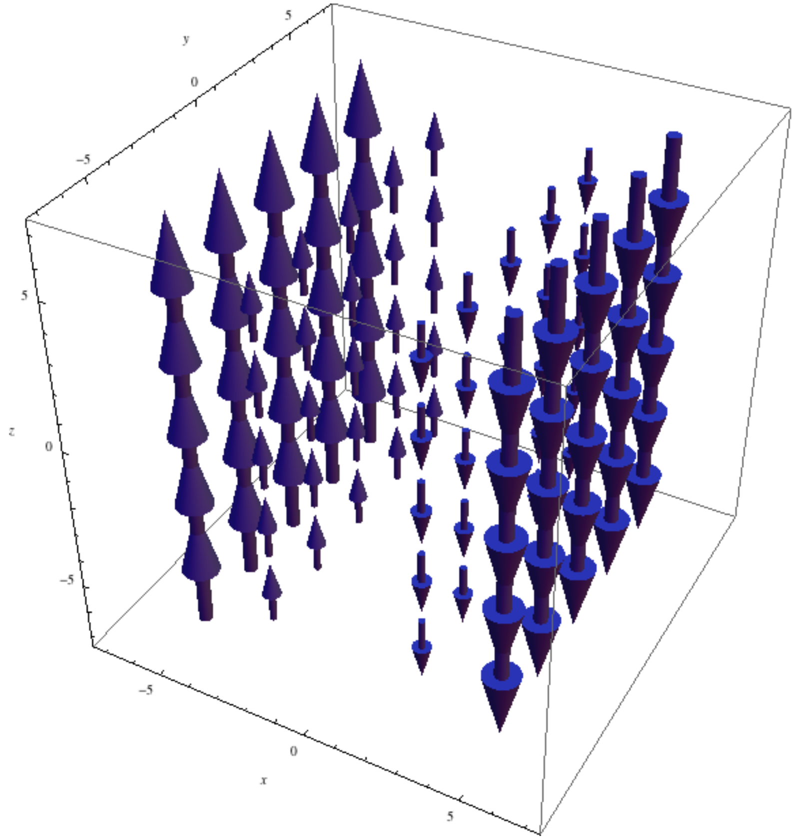
ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

$$\mathrm{curl}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\times\left(F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}\right) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{F} = -x^2\,\hat{j}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = -2x\,\hat{k}$$





ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

$$\mathrm{curl}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\times\left(F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}\right) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

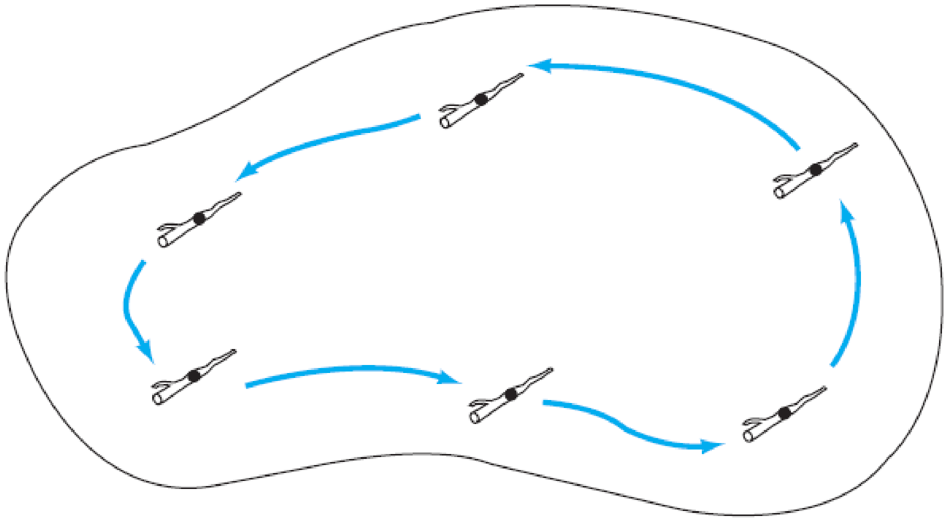
Αριθμητικό Παράδειγμα

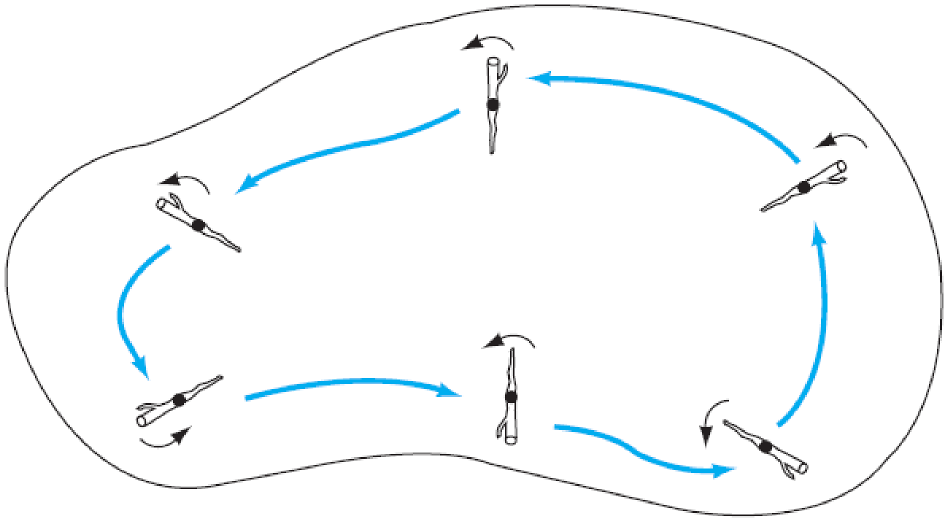
$$\vec{F} = x^2 y\,\hat{i} - 2xz\,\hat{j} + (x+y-z)\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y & -2xz & x+y-z \end{vmatrix} = (2x+1)\hat{i} - \hat{j} - (x^2+2z)\hat{k}$$

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Σχηματικό παράδειγμα κίνησης ενός κλαδιού δέντρου στο υδάτινο ρεύμα μιας λίμνης. Το κλαδί ακολουθεί την πορεία που καθορίζει το διάνυσμα της ταχύτητας του ρευστού στην επιφάνεια της λίμνης. Εάν ο προσανατολισμός του κλαδιού δεν αλλάζει (αριστερά), τότε δεν υπάρχει στροβιλισμός στο πεδίο των ταχυτήτων (curl**F**=**0**). Στην αντίθετη περίπτωση ύπαρξης στροβιλισμού (δεξιά), το κλαδί πέραν από την μεταφορική εκτελεί και περιστροφική κίνηση.





$$\mathrm{curl}\vec{F} = \vec{0} \qquad\qquad \mathrm{curl}\vec{F} \neq \vec{0}$$