Νίκος Σταματόπουλος

Ανεξαρτησία των κινήσεων & Υπέρθεση

Η «ανεξαρτησία» των κινήσεων και η υπέρθεση δεν είναι ακριβώς το ίδιο πράγμα . Για να καταλάβουμε τη διαφορά τους θα πρέπει πρώτα να αναλύσουμε το θέμα της **ανεξαρτησίας** των κινήσεων και να δούμε πότε ισχύει (αφού, όπως έχει ήδη αναφερθεί από πολλούς στο forum, δεν ισχύει πάντα και επομένως δεν αποτελεί αρχή) .

Αρχικά όμως ας συμφωνήσουμε στο *τι εννοούμε λέγοντας* ***"~~αρχή~~" ανεξαρτησίας των κινήσεων***.

Για ευκολία θα αναφερθώ αρχικά σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και κλείνοντας θα καταλήξω σε μία γενίκευση.

Η μετατόπιση $\Delta\vec{r}$ ενός σώματος σε χρόνο Δt μπορεί να αναλυθεί σε μια μετατόπιση $\Delta x\,\vec{i}$ στον άξονα x που γίνεται σε χρόνο Δt και σε μία μετατόπιση $\Delta y\,\vec{j}$ στον άξονα y στον ίδιο χρόνο Δt .

Η πρόταση αυτή είναι ***ΣΩΣΤΗ*** **αλλά δεν** εννοούμε αυτό λέγοντας «~~αρχή~~ ανεξαρτησίας των κινήσεων».

Τι παραπάνω εννοούμε;

Εννοούμε ότι η μετατόπιση Δx στο χρόνο Δt δεν επηρεάζεται καθόλου από τη "θέση" y(t) του σώματος στον άξονα y και από τη συνιστώσα $\upsilon_y(t)$ της ταχύτητας του σώματος στον άξονα y **σε όλο το χρονικό διάστημα Δt**. (Αντίστοιχα ισχύουν για τη μετατόπιση Δy).

Είναι όμως ο υπολογισμός του Δx είναι ανεξάρτητος από τα y(t) και $\upsilon_y(t)$;;;;;

Αν είναι **τότε** το dx (σε χρόνο dt) είναι ανεξάρτητο των y(t) , $\upsilon_y(t)$

άρα και το $\upsilon_x(t) = \dfrac{dx}{dt}$ ***είναι ανεξάρτητο*** των y(t) , $\upsilon_y(t)$.

(ομοίως : $\upsilon_y(t) = \dfrac{dy}{dt}$ ***είναι ανεξάρτητο*** των x(t) , $\upsilon_x(t)$).

Όμως γενικά σ' ένα σώμα που κινείται στο επίπεδο, η δύναμη η οποία ασκείται σε αυτό μπορεί να έχει τη γενική μορφή :

$$\vec{F}(x,y,\upsilon_x,\upsilon_y,t) = F_x(x,y,\upsilon_x,\upsilon_y,t)\vec{i} + F_y(x,y,\upsilon_x,\upsilon_y,t)\vec{j}$$

(*Παράδειγμα*: Σε θετικά φορτισμένο σωματίδιο σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B\vec{k}$ όπου έχουμε $F_x = qB\upsilon_y$ και $F_y = -q\upsilon_x B$)

Σύμφωνα με το 2^o ΝΝ έχουμε:

$$m\left(\frac{d\upsilon_x}{dt}\vec{i} + \frac{d\upsilon_y}{dt}\vec{j}\right) = F_x(x,y,\upsilon_x,\upsilon_y,t)\vec{i} + F_y(x,y,\upsilon_x,\upsilon_y,t)\vec{j}$$

οδηγούμαστε στις εξισώσεις:

$$\frac{d\upsilon_x}{dt} = f_x(x,y,\upsilon_x,\upsilon_y,t) \qquad \frac{d\upsilon_y}{dt} = f_y(x,y,\upsilon_x,\upsilon_y,t) \qquad \text{όπου } f_x = F_x/m \text{ και } f_y = F_y/m$$

Τι παρατηρούμε;

Ότι γενικά ο ρυθμός μεταβολής του υ_x (άρα και το υ_x) εξαρτάται από τα y(t) , υ_y(t).

Συμπεράσματα:

1. Η ανεξαρτησία των κινήσεων ισχύει όταν $f_x = f_x(x, \upsilon_x, t)$ και $f_y = f_y(y, \upsilon_y, t)$.

2. ***Γενικότερα,*** ανεξαρτησία των κινήσεων έχουμε όταν έχουμε ***ανεξάρτητες διαφορικές εξισώσεις***. ***Σε κάθε διαφορική εξίσωση να εμφανίζεται μία και μόνο συντεταγμένη***.

3. Η συνθήκες αυτές είναι σίγουρα ικανές για να έχουμε ανεξαρτησία των κινήσεων. Αν δεν ισχύουν ελέγχεται το πρόβλημα κατά περίπτωση.

4. Για την «ανεξαρτησία» κινήσεων στην ίδια διεύθυνση δεν με βρίσκει σύμφωνο ο όρος αφού ένα σώμα ακίνητο μπορεί να θεωρηθεί ότι εκτελεί π.χ. 2 ευθύγραμμες κινήσεις με αντίθετες ταχύτητες.

Και πάμε στο θέμα της **υπέρθεσης ή επαλληλίας** που έχει ως αφετηρία τη ***γραμμικότητα*** των διαφορικών εξισώσεων.

Για την ανεξαρτησία των κινήσεων δεν θέσαμε **κανένα περιορισμό** στη μορφή των διαφορικών εξισώσεων (δ.ε.) πέρα από το να εμφανίζεται μία μόνο συντεταγμένη (με τις χρονικές παραγώγους της μέχρι $2^{ης}$ τάξης)
Υπέρθεση ή επαλληλία σε μία δ.ε. κίνησης $2^{ης}$ τάξης (ο $2^{ος}$ ΝΝ είναι δ.ε. $2^{ης}$ τάξης) σημαίνει ότι: αν $x_1(t)$ και $x_2(t)$ είναι δύο (γραμμικά) ανεξάρτητες λύσεις της δ.ε. τότε και κάθε γραμμικός συνδυασμός τους ($c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$) είναι επίσης λύση.
Η υπέρθεση όμως ισχύει μόνο στις ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δηλαδή στις εξισώσεις της μορφής
$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = 0$ όπου $a(t)$ και $b(t)$ συναρτήσεις μόνο του χρόνου.

π.χ. η γνωστή δ.ε. του αρμονικού ταλαντωτή $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ είναι γραμμική και έχει δύο προφανείς ανεξάρτητες λύσεις την ημωt και συνωt. Η γενική λύση είναι c_1ημωt + c_2 συνωt.

όμως η δ.ε. $\ddot{x} + \omega^2 x^2 = 0$ δεν είναι γραμμική άρα δεν ισχύει η υπέρθεση των λύσεων.

Η υπέρθεση χρησιμοποιείται στη Φυσική σε ΓΡΑΜΜΙΚΑ συστήματα δ.ε. που προκύπτουν από τη μελέτη **συστήματος** σωμάτων. Το αρχικό ΓΡΑΜΜΙΚΟ σύστημα δ.ε. μετατρέπεται σε ΓΡΑΜΜΙΚΟ σύστημα ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ δ.ε. οι λύσεις των οποίων δίνουν τους γνωστούς «κανονικούς τρόπους ταλάντωσης» (normal modes).

Συνοψίζοντας,
Η υπέρθεση (ή επαλληλία) σχετίζεται αφενός με τη γραμμικότητα των δ.ε. και αφετέρου εφαρμόζεται κυρίως σε σύστημα σωμάτων που περιγράφονται από γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. (Αυτό συμβαίνει όταν υπάρχει αναλογία μεταξύ αιτίου και αιτιατού).

Παράδειγμα:
Αν οι δ.ε. κίνησης ενός σώματος στους άξονες xx’ και yy’ είναι :
$\ddot{x} + \omega^2 x^2 = 0$
$\ddot{y} + \omega^2 y = 0$
ισχύει η ανεξαρτησία αλλά όχι η υπέρθεση.

Δυστυχώς στον όρο «υπέρθεση» έκαναν «κράτηση» πρώτοι οι …. Μαθηματικοί !