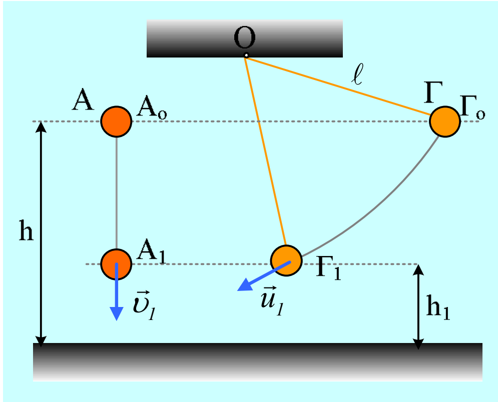
Οι ταχύτητες σε δύο διαφορετικές διαδρομές



Δυο μικρές σφαίρες Α και Γ, συγκρατούνται στις θέσεις $Α_ο$ και $Γ_ο$ αντίστοιχα, σε ύψος h=1,25m από το έδαφος.

i) Αφήνουμε την Α σφαίρα να πέσει ελεύθερα. Να βρεθεί η ταχύτητά της $υ_1$, στη θέση $Α_1$ όπου απέχει κατά h_1= 0,45m από το έδαφος.

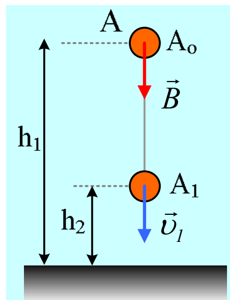
ii) Αφήνουμε την Γ σφαίρα να κινηθεί, ενώ αυτή είναι δεμένη στο άκρο νήματος, το άλλο άκρο του οποίου έχει δεθεί σε σταθερό σημείο Ο. Η σφαίρα διαγράφει τμήμα κύκλου και φτάνει στη θέση $Γ_1$, η οποία βρίσκεται σε ύψος h_1, έχοντας ταχύτητα μέτρου u_1. Να υπολογισθεί το μέτρο της ταχύτητας αυτής.

iii) Με ποια ταχύτητα η Α σφαίρα φτάνει στο έδαφος;

iv) Αν στη θέση $Γ_1$ το νήμα που συγκρατεί τη σφαίρα Γ κόβεται, να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας με την οποία η σφαίρα αυτή θα φτάσει στο έδαφος.

Δίνεται $g=10m/s^2$, ενώ στην διάρκεια της κυκλικής κίνησης η ταχύτητα της σφαίρας, είναι εφαπτόμενη της τροχιάς που διαγράφει.

Απάντηση:

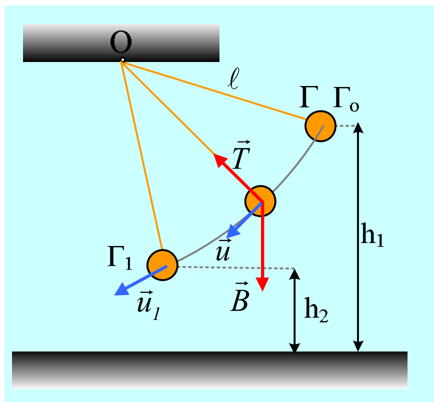


i) Μόλις αφεθεί η Α σφαίρα να κινηθεί, αυτή κινείται με την επίδραση μόνο της δύναμης του βάρους, μιας συντηρητικής δύναμης, οπότε η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή. Έτσι θεωρώντας ότι το σώμα στο έδαφος δεν έχει δυναμική ενέργεια, θα έχουμε με εφαρμογή της ΑΔΜΕ μεταξύ των θέσεων $Α_1$ και $Α_2$.

$$K_o + U_o = K_1 + U_1 \rightarrow$$

$$0 + m_1 gh = \frac{1}{2} m_1 υ_1^2 + m_1 g h_1 \rightarrow υ_1^2 = 2g\left(h - h_1\right) \rightarrow$$

$$υ_1 = \sqrt{2g\left(h-h_1\right)} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot \left(1,25 - 0,45\right)}\, {}^{m}\!/_{s} = 4m/s$$



ii) Αν πάρουμε τη σφαίρα Γ σε μια τυχαία θέση και σχεδιάσουμε τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω της, θα πάρουμε το διπλανό σχήμα.

Η τάση του νήματος $\vec{T}$ είναι διαρκώς κάθετη στην ταχύτητα της σφαίρας, συνεπώς δεν παράγει έργο. Έτσι έργο παράγει μόνο το βάρος, μια συντηρητική δύναμη, με αποτέλεσμα η μηχανική ενέργεια να παραμένει σταθερή. Εφαρμόζουμε λοιπόν και για τη σφαίρα Γ την ΑΔΜΕ, μεταξύ των θέσεων $Γ_ο$ και $Γ_1$, όπως την εφαρμόσαμε και στο προηγούμενο ερώτημα:

$$K_o + U_o = K_1 + U_1 \rightarrow$$

$$0+m_2gh=\frac{1}{2}m_2u_1^2+m_2gh_1\rightarrow u_1^2=2g\left(h-h_1\right)\rightarrow$$
$$u_1=\sqrt{2g\left(h-h_1\right)}=\sqrt{2\cdot 10\cdot\left(1{,}25-0{,}45\right)}\,{}^{m}\!/\!{}_{s}=4m/s$$

iii) Εφαρμόζουμε ξανά για την Α σφαίρα την ΑΔΜΕ, ανάμεσα στη θέση A_1 και στη θέση που κτυπά στο έδαφος με ταχύτητα υ_2:

$$K_1+U_1=K_2+U_2\rightarrow$$
$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+m_1gh_1=\frac{1}{2}m_1\upsilon_2^2+0\rightarrow\upsilon_2^2=\upsilon_1^2+2gh_1\rightarrow$$
$$\upsilon_2=\sqrt{\upsilon_1^2+2gh_1}=\sqrt{4^2+2\cdot 10\cdot 0{,}45}\,{}^{m}\!/\!{}_{s}=5m/s$$

iv) Αλλά και για τη σφαίρα Γ θα ισχύουν όλα τα παραπάνω. Μπορεί να μην κινηθεί ευθύγραμμα αλλά σε καμπύλη τροχιά, αλλά και πάλι κινείται με την επίδραση μόνο του βάρους, οπότε η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή και δουλεύοντας όπως στο προηγούμενο ερώτημα βρίσκουμε ότι και πάλι:

$$u_2=\sqrt{u_1^2+2gh_1}=5m/s$$

Σχόλια:

- Αξίζει να προσέξουμε ότι οι ταχύτητες των δύο σφαιρών, στο ίδιο ύψος, έχουν ίσα μέτρα, ανεξάρτητα της διαδρομής, αφού και το έργο του βάρους, είναι ανεξάρτητο της διαδρομής!
- Στην εκφώνηση δεν δόθηκαν οι μάζες των δύο σφαιρών. Είναι ίδιες; Ποια είναι μεγαλύτερη; Η παρακάτω διαπραγμάτευση απέδειξε ότι οι ζητούμενες ταχύτητες είναι ανεξάρτητες των μαζών.

dmargaris@gmail.com