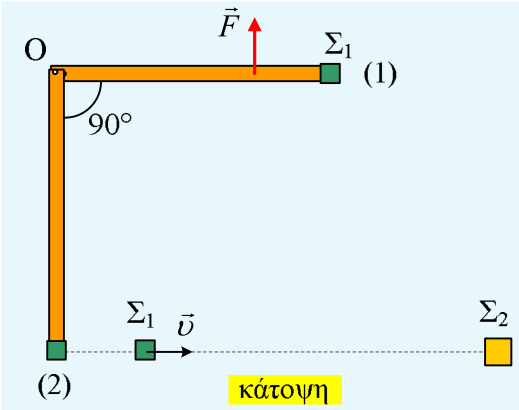
Περιστροφή ράβδου και μια κρούση υλικών σημείων



Η ράβδος του σχήματος, μήκους l=2m μπορεί να στρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο, γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το άκρο της Ο, ενώ στο άλλο της άκρο έχει προσκολληθεί ένα σώμα Σ_1, μάζας m_1=1kg. Η ράβδος είναι αρχικά ακίνητη στη θέση (1), ενώ τη στιγμή t=0, δέχεται κατάλληλη δύναμη F, η ροπή της οποίας, της προσδίδει σταθερή γωνιακή επιτάχυνση. Μόλις η ράβδος περνά από την θέση (2) για δεύτερη φορά, το σώμα Σ_1 αποκολλάται και στη συνέχεια κινείται ευθύγραμμα στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και αφού διανύσει απόσταση d=3,5m, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά, με ένα σώμα Σ_2, μάζας m_2=2kg, το οποίο είναι ακίνητο. Τελικά τα δυο σώματα ηρεμούν, απέχοντας μεταξύ τους απόσταση S=2,5m. Να υπολογιστούν:

i) Οι ταχύτητες των δύο σωμάτων, αμέσως μετά την ελαστική μεταξύ τους κρούση.

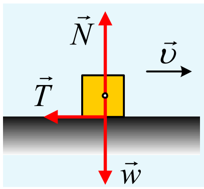
ii) Η ταχύτητα του σώματος Σ_1, την στιγμή που αποχωρίζεται τη ράβδο.

iii) Η χρονική στιγμή t_1 της αποκόλλησης του σώματος Σ_1.

iii) Η επιτάχυνση του σώματος Σ_1 ελάχιστα πριν την αποκόλλησή του από την ράβδο, στην διεύθυνση της ταχύτητας. Ποια η αντίστοιχη επιτάχυνση στην κάθετη διεύθυνση;

Δίνεται η γωνία φ=90°, που σχηματίζουν οι δυο παραπάνω θέσεις της ράβδου (1) και (2), οι διαστάσεις των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 θεωρούνται αμελητέες, ενώ ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ των σωμάτων και του επιπέδου μ=0,1. Εξάλλου g=10m/s^2.

Απάντηση:



i) Για ένα σώμα που ξεκινά με αρχική ταχύτητα u στο οριζόντιο επίπεδο, λόγω της τριβής που δέχεται, θα σταματήσει μετά από λίγο, αφού διανύσει απόσταση s. Εφαρμόζοντας για το σώμα αυτό το Θ.Μ.Κ.Ε. παίρνουμε:

$$K_\tau - K_\alpha = W_w + W_N + W_T \xrightarrow{K_\tau = W_w = W_N = 0}$$

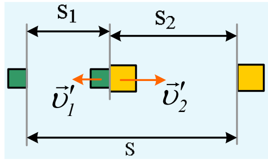
$$-\frac{1}{2}mu^2 = -Ts \to \frac{1}{2}mu^2 = \mu mgs \to s = \frac{u^2}{2\mu g} \quad (1)$$

Αν το σώμα Σ_1 ελάχιστα πριν την κρούση έχει ταχύτητα υ_1, τότε μετά την κρούση, τα σώματα αποκτούν ταχύτητες:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \quad (2) \qquad \upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \quad (3) \xrightarrow{(2):(3)}$$

$$\frac{\upsilon_1'}{\upsilon_2'} = \frac{m_1 - m_2}{2m_1} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2} \to \upsilon_2' = -2\upsilon_1' \quad (4)$$

Επειδή $m_1 < m_2$ από την (2) προκύπτει ότι $\upsilon'_1 < 0$, οπότε τα δύο σώματα θα κινηθούν αντίθετα διανύοντας αποστάσεις s_1 και s_2. όπως στο σχήμα. Οπότε λαμβάνοντας υπόψη μας την σχέση (1), θα έχουμε:



$$s_1 + s_2 = S \rightarrow \frac{\upsilon_1'^2}{2\mu g} + \frac{\upsilon_2'^2}{2\mu g} = S \rightarrow \frac{\upsilon_1'^2 + 4\upsilon_1'^2}{2\mu g} = S \rightarrow$$

$$|\upsilon_1'| = \sqrt{\frac{2\mu g S}{5}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0{,}1\cdot 10\cdot 2{,}5}{5}} m/s = 1m/s \rightarrow$$

$$\upsilon_1' = -1m/s \xrightarrow{(4)}$$

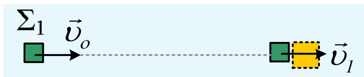
$$\upsilon_2' = 2m/s$$

ii) Από την εξίσωση (2) υπολογίζουμε την ταχύτητα του σώματος Σ_1, ελάχιστα πριν την κρούση:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2}\upsilon_1' = \frac{1+2}{1-2}(-1)m/s = 3m/s$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για το σώμα Σ_1 από την θέση (2) όπου αυτό εγκαταλείπει τη ράβδο, μέχρι την θέση, ελάχιστα πριν την κρούση:



$$K_\tau - K_\alpha = W_w + W_N + W_T \xrightarrow{W_w = W_N = 0}$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = -Td \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_o^2 = -\mu m_1 g d \rightarrow$$

$$\upsilon_o = \sqrt{\upsilon_1^2 + 2\mu g d} = \sqrt{3^2 + 2\cdot 0{,}1\cdot 10\cdot 3{,}5} m/s = \sqrt{16} m/s = 4m/s$$

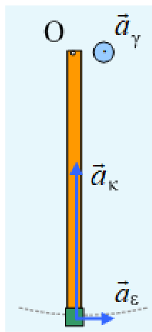
iii) Η παραπάνω ταχύτητα του σώματος Σ_1, είναι ίση με την γραμμική ταχύτητα του άκρου της ράβδου, η οποία συνδέεται με την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής με τη σχέση:

$$\upsilon_o = \omega_1 l \rightarrow \omega_1 = \frac{\upsilon_o}{l} = \frac{4}{2} rad/s = 2rad/s$$

Η ράβδος από 0-t_1 διαγράφει γωνία θ=2π+3π/2=3,5π rad. Για την επιταχυνόμενη στροφική κίνηση του στερεού ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\omega_1 = \alpha_\gamma t \quad (5) \quad \text{και} \quad \theta = \frac{1}{2}\alpha_\gamma t^2 \quad (6)$$

Με απαλοιφή της γωνιακή επιτάχυνσης από τις παραπάνω σχέσεις, παίρνουμε:



$$\theta = \frac{1}{2}\frac{\omega_1}{t}t^2 = \frac{1}{2}\omega_1 t_1 \rightarrow$$

$$t_1 = \frac{2\theta}{\omega_1} = \frac{2\cdot 3{,}5\pi}{2} s = 3{,}5\pi\ s = 38{,}5s$$

iv) Από την εξίσωση (5) βρίσκουμε:

$$\omega_1 = \alpha_\gamma t_1 \rightarrow \alpha_\gamma = \frac{\omega_1}{t_1} = \frac{2}{3{,}5\pi} rad/s^2$$

Το σώμα Σ_1, ελάχιστα πριν την αποχώρησή του από την ράβδο, έχει μια επιτρόχια επιτάχυνση και μια κεντρομόλο επιτάχυνση, όπως στο σχήμα. Για τα μέτρα τους έχουμε:

$$\alpha_\varepsilon = \alpha_\gamma l = \frac{2}{3{,}5\pi} \cdot 2\, {}^{m}\!/_{s^2} = 0{,}36\, {}^{m}\!/_{s^2}$$

$$\alpha_\kappa = \omega^2 R = 2^2 \cdot 2\, {}^{m}\!/_{s^2} = 8\, {}^{m}\!/_{s^2}.$$

dmargaris@gmail.com