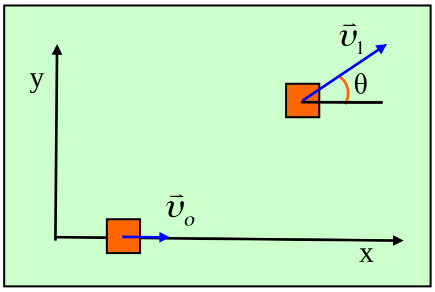
Η μεταβολή της ορμής και η δύναμη

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_0$=1m/s ένα σώμα μάζας 2kg στην διεύθυνση x, όπως στο σχήμα. Σε μια στιγμή ασκείται πάνω του μια σταθερή οριζόντια δύναμη F (κατά μέτρο και κατεύθυνση), με αποτέλεσμα μετά από 3s το σώμα να έχει ταχύτητα μέτρου $υ_1$=5m/s η οποία σχηματίζει γωνία θ με την διεύθυνση x, όπου ημθ=0,6 και συνθ=0,8.



i) Να βρεθεί η μεταβολή της ορμής του σώματος $Δp_x$ και $Δp_y$, στις διευθύνσεις των αξόνων x και y στο παραπάνω χρονικό διάστημα, καθώς και η συνολική μεταβολή της ορμής του σώματος

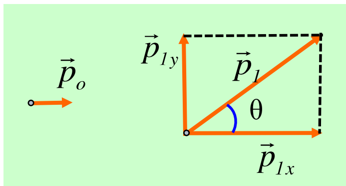
ii) Να βρεθεί η κατεύθυνση και να υπολογιστεί το μέτρο της ασκούμενης δύναμης F.

iii) Να υπολογισθεί το έργο της δύναμης στο παραπάνω χρονικό διάστημα.

iv) Ποια η στιγμιαία ισχύς P_0 της δύναμης στην αρχική θέση; Στην τελική θέση η ισχύς της δύναμης είναι μεγαλύτερη, μικρότερη ή ίση με την ισχύ P_0;

Απάντηση:

i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα διανύσματα της αρχικής και της τελικής ορμής (η οποία έχει αναλυθεί σε δυο συνιστώσες στους άξονες x και y). Για τα μέτρα τους έχουμε:



$$p_0 = mυ_0 = 2 \cdot 1kgm/s = 2kgm/s \text{ και}$$

$$p_1 = mυ_1 = 2 \cdot 5kgm/s = 10kgm/s$$

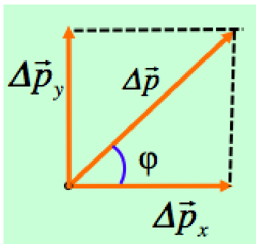
Οπότε για τις μεταβολές της ορμής στους δυο άξονες, θα έχουμε:

$$Δp_x = p_{1x} - p_0 = p_1 \cdot συνθ - p_0 = 10 \cdot 0{,}8kgm/s - 2kgm/s = 6kgm/s$$

$$Δp_y = p_{1y} - 0 = p_1 \cdot ημθ = 10 \cdot 0{,}6kgm/s = 6kgm/s$$

Ενώ η συνολική μεταβολή της ορμής, έχει μέτρο:

$$Δp = \sqrt{(Δp_x)^2 + (Δp_y)^2} = \sqrt{6^2 + 6^2}kgm/s = 6\sqrt{2}kgm/s$$



Ενώ η διεύθυνσή της σχηματίζει γωνία φ=45° με την διεύθυνση x, αφού το σχηματιζόμενο παραλληλόγραμμο (βλέπε σχήμα) είναι τετράγωνο.

ii) Από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\vec{F} = \frac{Δ\vec{p}}{Δt}$$

Πράγμα που σημαίνει ότι η ασκούμενη οριζόντια δύναμη έχει την κατεύθυνση του διανύσματος $Δ\vec{p}$

σχηματίζει δηλαδή και η δύναμη γωνία 45° με την διεύθυνση x, έχοντας μέτρο:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{6\sqrt{2}}{3} N = 2\sqrt{2} N$$

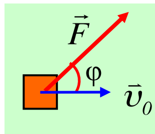
iii) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σώμα, μεταξύ αρχικής και τελικής θέσης και λαμβάνοντας υπόψη ότι το βάρος και η κάθετη αντίδραση του επιπέδου είναι δυνάμεις κατακόρυφες, συνεπώς κάθετες στην μετατόπιση και δεν παράγουν έργο, έχουμε:

$$K_t - K_a = W_F \rightarrow$$

$$W_F = \frac{1}{2} m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2} m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2} 2 \cdot 5^2 J - \frac{1}{2} 2 \cdot 1^2 J = 24J$$

iv) Για την στιγμιαία ισχύ μιας δύναμης έχουμε:

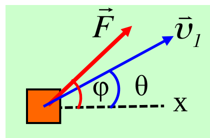
$$P = \frac{\Delta W_F}{\Delta t} = \frac{F \cdot \Delta x \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}{\Delta t} = F \cdot \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$



όπου F το μέτρο της δύναμης και υ το μέτρο της ταχύτητας τη στιγμή αυτή.

Στην αρχική θέση η γωνία μεταξύ δύναμης και ταχύτητας είναι φ=45° οπότε παίρνουμε:

$$P_0 = F \cdot \upsilon_o \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 2\sqrt{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} W = 2W \quad (1)$$



Στην τελική θέση, η κατάσταση είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η δύναμη σχηματίζει γωνία φ με την διεύθυνση x, ενώ η ταχύτητα γωνία θ. Αλλά τότε η γωνία μεταξύ ταχύτητα και δύναμης είναι ίση με φ-θ. Έτσι για την στιγμιαία ισχύ θα έχουμε:

$$P_1 = F \cdot \upsilon_1 \cdot \sigma\upsilon\nu(\varphi - \theta) \quad (2)$$

Αν συγκρίνουμε τις (1) και (2) βλέπουμε ότι έχουμε την ίδια δύναμη, αλλά $\upsilon_0<\upsilon_1$ και συνφ<συν(φ-θ), αφού στο πρώτο τεταρτημόριο η συνάρτηση του συνημιτόνου είναι φθίνουσα (αν για δύο γωνίες α ακι β ισχύει α < β, τότε συνα>συνβ). Συνεπώς και $P_0 < P_1$ ή αν προτιμάτε $P_1 > P_0$.

dmargaris@gmail.com

§