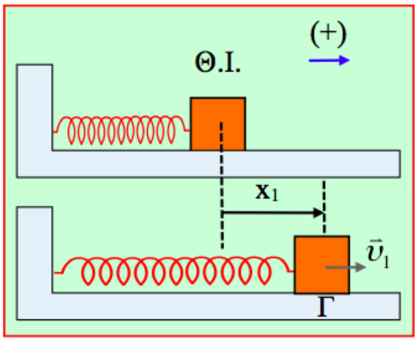
Μια αατ και μια φθίνουσα ταλάντωση



Ένα σώμα μάζας m=1kg εκτελεί αατ, σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k. Παίρνοντας κάποια στιγμή ως $t_0=0$, η εξίσωση της απομάκρυνσής του είναι x=0,5ημ(10t) μονάδες στο S.I. Σε μια στιγμή t_1 το σώμα περνά από μια θέση Γ με απομάκρυνση x_1=0,3m, κινούμενο προς τα δεξιά (με θετική ταχύτητα), όπως στο σχήμα.

i) Να υπολογιστεί η η ενέργεια ταλάντωσης του σώματος, καθώς και η επιτάχυνσή του στη θέση Γ.

ii) Να υπολογιστούν η κινητική και δυναμική ενέργεια ταλάντωσης στην παραπάνω θέση.

iii) Να βρεθούν οι ρυθμοί μεταβολής της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας (dK/dt, dU/dt) στην θέση Γ.

iv) Αν στο σώμα αυτό, ασκείτο και δύναμη απόσβεσης της μορφής $F_{απ}$ =-2υ (S.I.) και δίναμε αρχικά κάποια ενέργεια στο σώμα για να ταλαντωθεί, αφού υπολογιστεί η επιτάχυνση του σώματος στη θέση Γ, να απαντηθούν τα αντίστοιχα ερωτήματα ii) και iii), αν δίνεται ότι στη θέση x_1=0,3m το σώμα κινείται επίσης προς τα δεξιά με ταχύτητα μέτρου u_1=2m/s;

Απάντηση:

i) Από την εξίσωση της απομάκρυνσης προκύπτει ότι ω=10rad/s, οπότε:

$$k = D = m\omega^2 = 1 \cdot 10^2 N/m = 100N/m$$

έτσι με πλάτος A_1=0,5m, θα έχουμε για την ενέργεια ταλάντωσης:

$$E_1 = \frac{1}{2}DA_1^2 = \frac{1}{2}kA_1^2 = \frac{1}{2}100 \cdot 0{,}5^2 J = 12{,}5J$$

Εξάλλου στη θέση Γ, το σώμα έχει επιτάχυνση:

$$\alpha_1 = -\omega^2 \cdot y_1 = -10^2 \cdot 0{,}3 \, m/s^2 = -30 \, m/s^2$$

Το αρνητικό πρόσημο μας λέει, ότι η επιτάχυνση του σώματος έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά, προς την θέση ισορροπίας.

ii) Η παραπάνω ενέργεια ταλάντωσης, στη θέση Γ εμφανίζεται κατά ένα μέρος ως κινητική και το υπόλοιπο ως δυναμική:

$$E_1 = K_1 + U_1 \rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}Dx_1^2 = \frac{1}{2}DA_1^2 \rightarrow$$

$$\upsilon_1 = +\sqrt{\frac{D}{m}\left(A_1^2 - x_1^2\right)} = \omega\sqrt{A_1^2 - x_1^2} = 10\sqrt{0{,}5^2 - 0{,}3^2} m/s = 4m/s$$

Έτσι στη θέση Γ, θα έχουμε:

$$K_1 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}1\cdot 4^2 J = 8J \text{ και } U_1 = \frac{1}{2}Dx_1^2 = \frac{1}{2}100\cdot 0,3^2 J = 4,5J$$

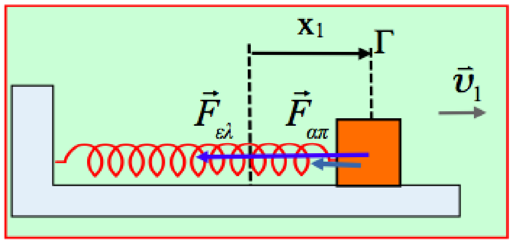
Για τους ρυθμούς μεταβολής θα έχουμε:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{ολ}}{dt} = \frac{|\Sigma F|\cdot dx\cdot συνα}{dt} = Dx_i\cdot\upsilon_1\cdot συν180^o = -100\cdot 0,3\cdot 4\,J/s = -120\,J/s$$

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dW_{F_{επ}}}{dt} = -\frac{|Dx|\cdot dx\cdot συνα}{dt} = +Dx_i\cdot\upsilon_1 = +100\cdot 0,3\cdot 4\,J/s = +120\,J/s$$

πράγμα βέβαια αναμενόμενο, αφού K+U=στ, άρα $\frac{dK}{dt}+\frac{dU}{dt}=0 \rightarrow \frac{dK}{dt} = -\frac{dU}{dt}$

iii) Στην περίπτωση που το σώμα δέχεται δύναμη απόσβεσης, αυτό εκτελεί μια φθίνουσα ταλάντωση, ενώ στη θέση Γ, η δύναμη αυτή είναι ίση:



$$F_{απ} = -bυ = -2u_1 = -2\cdot 2N = -4N$$

αντίθετης κατεύθυνσης από την ταχύτητα (προς τα αριστερά), όπως στο σχήμα. Εξάλλου στην οριζόντια διεύθυνση το σώμα δέχεται επίσης την δύναμη του ελατηρίου, η οποία είναι και δύναμη επαναφοράς της ταλάντωσης του σώματος, με αλγεβρική τιμή:

$$F_{επ} = F_{ελ} = -kx_1 = -100\cdot 0,3N = -30N$$

Αλλά τότε ο 2ος νόμος του Νεύτωνα μας δίνει:

$$\Sigma F = m\alpha_2 \rightarrow F_{ελ} + F_{απ} = m\alpha_2 \rightarrow \alpha_2 = \frac{F_{ελ}+F_{απ}}{m} = \frac{-30-4}{1}m/s^2 = -34m/s^2$$

Με βάση αυτά έχουμε για τα αντίστοιχα ερωτήματα:

α) Για τις ενέργειες:

$$K_2 = \frac{1}{2}mu_1^2 = \frac{1}{2}1\cdot 2^2 J = 2J \text{ και } U_2 = \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}Dx_1^2 = \frac{1}{2}100\cdot 0,3^2 J = 4,5J$$

β) Για τους ρυθμούς μεταβολής των ενεργειών θα έχουμε:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{ολ}}{dt} = \frac{|\Sigma F|\cdot dx\cdot συνα}{dt} = \left|F_{ελ}+F_{απ}\right|\cdot u_1\cdot συν180^o = -(30+4)\cdot 2\,J/s = -68\,J/s$$

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dW_{F_{επ}}}{dt} = -\frac{|F_{ελ}|\cdot dx\cdot συνα}{dt} = +\left|F_{ελ}\right|\cdot\upsilon_1 = +30\cdot 2\,J/s = +60\,J/s$$

Σχόλιο:

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι ενώ στην αμείωτη ταλάντωση (αατ) η ενέργεια ταλάντωσης παραμένει σταθερή, με αποτέλεσμα να έχουμε απλά μετατροπή της δυναμικής ενέργειας σε κινητική και αντίστροφα, στην περίπτωση της φθίνουσας δεν συμβαίνει αυτό, Υπάρχει η μη συντηρητική δύναμη απόσβεσης η οποία αφαιρεί ενέργεια από το σύστημα (η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική). Έτσι παραπάνω:

$$P_{F_{\alpha\pi}} = -F_{\alpha\pi} \cdot u_1 = -4 \cdot 2\, {}^{J}\!/_{s} = -8W$$

όπου είναι η διαφορά των δύο παραπάνω ρυθμών:

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = -68\, {}^{J}\!/_{s} + 60\, {}^{J}\!/_{s} = -8\, {}^{J}\!/_{s}$$

dmargaris@gmail.com