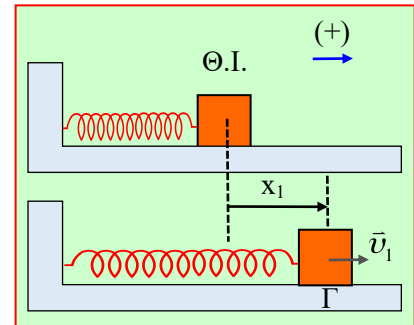


Μια αατ και μια φθίνουσα ταλάντωση

Ένα σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ εκτελεί αατ, σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k . Παίρνοντας κάποια στιγμή ως $t_0=0$, η εξίσωση της απομάκρυνσής του είναι $x=0,5\mu(10t)$ μονάδες στο S.I. Σε μια στιγμή t_1 το σώμα περνά από μια θέση Γ με απομάκρυνση $x_1=0,3\text{m}$, κινούμενο προς τα δεξιά (με θετική ταχύτητα), όπως στο σχήμα.



- i) Να υπολογιστεί η ενέργεια ταλάντωσης του σώματος, καθώς και η επιτάχυνσή του στη θέση Γ .
- ii) Να υπολογιστούν η κινητική και δυναμική ενέργεια ταλάντωσης στην παραπάνω θέση.
- iii) Να βρεθούν οι ρυθμοί μεταβολής της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας (dK/dt , dU/dt) στην θέση Γ .
- iv) Αν στο σώμα αυτό, ασκείται και δύναμη απόσβεσης της μορφής $F_{\text{απ}} = -2v$ (S.I.) και δίναμε αρχικά κάποια ενέργεια στο σώμα για να ταλαντωθεί, αφού υπολογιστεί η επιτάχυνση του σώματος στη θέση Γ , να απαντηθούν τα αντίστοιχα ερωτήματα ii) και iii), αν δίνεται ότι στη θέση $x_1=0,3\text{m}$ το σώμα κινείται επίσης προς τα δεξιά με ταχύτητα μέτρου $u_1=2\text{m/s}$;

Απάντηση:

- i) Από την εξίσωση της απομάκρυνσης προκύπτει ότι $\omega=10\text{rad/s}$, οπότε:

$$k = D = m\omega^2 = 1 \cdot 10^2 \text{ N / m} = 100 \text{ N / m}$$

έτσι με πλάτος $A_1=0,5\text{m}$, θα έχουμε για την ενέργεια ταλάντωσης:

$$E_1 = \frac{1}{2} D A_1^2 = \frac{1}{2} k A_1^2 = \frac{1}{2} 100 \cdot 0,5^2 \text{ J} = 12,5 \text{ J}$$

Εξάλλου στη θέση Γ , το σώμα έχει επιτάχυνση:

$$a_1 = -\omega^2 \cdot y_1 = -10^2 \cdot 0,3 \text{ m/s}^2 = -30 \text{ m/s}^2$$

Το αρνητικό πρόσημο μας λέει, ότι η επιτάχυνση του σώματος έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά, προς την θέση ισορροπίας.

- ii) Η παραπάνω ενέργεια ταλάντωσης, στη θέση Γ εμφανίζεται κατά ένα μέρος ως κινητική και το υπόλοιπο ως δυναμική:

$$E_1 = K_1 + U_1 \rightarrow \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} D x_1^2 = \frac{1}{2} D A_1^2 \rightarrow$$

$$v_1 = +\sqrt{\frac{D}{m} (A_1^2 - x_1^2)} = \omega \sqrt{A_1^2 - x_1^2} = 10 \sqrt{0,5^2 - 0,3^2} \text{ m / s} = 4 \text{ m / s}$$

Έτσι στη θέση Γ, θα έχουμε:

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}1 \cdot 4^2 J = 8J \quad \text{και} \quad U_1 = \frac{1}{2}Dx_1^2 = \frac{1}{2}100 \cdot 0,3^2 J = 4,5J$$

Για τους ρυθμούς μεταβολής θα έχουμε:

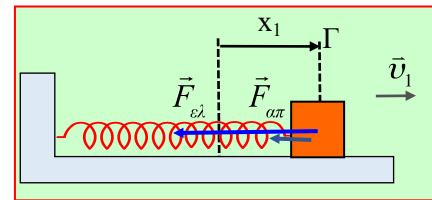
$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{ολ}}{dt} = \frac{|\Sigma F| \cdot dx \cdot \sigma \nu \alpha}{dt} = Dx_1 \cdot v_1 \cdot \sigma \nu \nu 180^\circ = -100 \cdot 0,3 \cdot 4 J/s = -120 J/s$$

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dW_{F_{επ}}}{dt} = -\frac{|Dx| \cdot dx \cdot \sigma \nu \alpha}{dt} = +Dx_1 \cdot v_1 = +100 \cdot 0,3 \cdot 4 J/s = +120 J/s$$

πράγμα βέβαια αναμενόμενο, αφού $K+U=\sigma\tau$, άρα $\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dK}{dt} = -\frac{dU}{dt}$.

iii) Στην περίπτωση που το σώμα δέχεται δύναμη απόσβεσης, αυτό εκτελεί μια φθίνουσα ταλάντωση, ενώ στη θέση Γ, η δύναμη αυτή είναι ίση:

$$F_{\sigma\pi} = -bv = -2u_1 = -2 \cdot 2 N = -4 N$$



αντίθετης κατεύθυνσης από την ταχύτητα (προς τα αριστερά), όπως στο σχήμα. Εξάλλου στην οριζόντια διεύθυνση το σώμα δέχεται επίσης την δύναμη του ελατηρίου, η οποία είναι και δύναμη επαναφοράς της ταλάντωσης του σώματος, με αλγεβρική τιμή:

$$F_{\epsilon\pi} = F_{\epsilon\lambda} = -kx_1 = -100 \cdot 0,3 N = -30 N$$

Αλλά τότε ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα μας δίνει:

$$\Sigma F = ma_2 \rightarrow F_{\epsilon\lambda} + F_{\sigma\pi} = ma_2 \rightarrow a_2 = \frac{F_{\epsilon\lambda} + F_{\sigma\pi}}{m} = \frac{-30 - 4}{1} m/s^2 = -34 m/s^2$$

Με βάση αυτά έχουμε για τα αντίστοιχα ερωτήματα:

α) Για τις ενέργειες:

$$K_2 = \frac{1}{2}mu_1^2 = \frac{1}{2}1 \cdot 2^2 J = 2J \quad \text{και} \quad U_2 = \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}Dx_1^2 = \frac{1}{2}100 \cdot 0,3^2 J = 4,5J$$

β) Για τους ρυθμούς μεταβολής των ενεργειών θα έχουμε:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{ολ}}{dt} = \frac{|\Sigma F| \cdot dx \cdot \sigma \nu \alpha}{dt} = |F_{\epsilon\lambda} + F_{\sigma\pi}| \cdot u_1 \cdot \sigma \nu \nu 180^\circ = -(30+4) \cdot 2 J/s = -68 J/s$$

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dW_{F_{\epsilon\pi}}}{dt} = -\frac{|F_{\epsilon\lambda}| \cdot dx \cdot \sigma \nu \alpha}{dt} = +|F_{\epsilon\lambda}| \cdot v_1 = +30 \cdot 2 J/s = +60 J/s$$

Σχόλιο:

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι ενώ στην αμείωτη ταλάντωση (αατ) η ενέργεια ταλάντωσης παραμένει

σταθερή, με αποτέλεσμα να έχουμε απλά μετατροπή της δυναμικής ενέργειας σε κινητική και αντίστροφα, στην περίπτωση της φθίνουσας δεν συμβαίνει αυτό, Υπάρχει η μη συντηρητική δύναμη απόσβεσης η οποία αφαιρεί ενέργεια από το σύστημα (η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική). Έτσι παραπάνω:

$$P_{F_{\alpha\alpha}} = -F_{\alpha\alpha} \cdot u_1 = -4 \cdot 2 \text{ J/s} = -8 \text{ W}$$

όπου είναι η διαφορά των δύο παραπάνω ρυθμών:

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = -68 \text{ J/s} + 60 \text{ J/s} = -8 \text{ J/s}$$

dmargaris@gmail.com