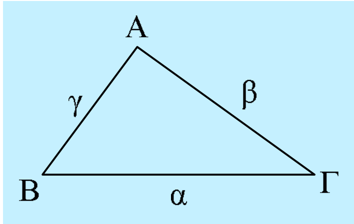
Ο μέγιστος και ο ελάχιστος χρόνος για μια διαδρομή

Τριγωνική ανισότητα.



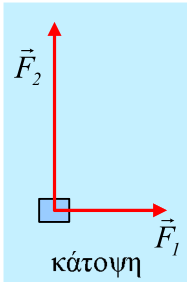
«Σε κάθε ένα τρίγωνο, το μήκος κάθε πλευράς είναι μικρότερο από το άθροισμα των μηκών των άλλων δύο πλευρών, καθώς και μεγαλύτερο από τη διαφορά τους».

Έτσι αν πάρουμε το διπλανό τρίγωνο, θα ισχύει π.χ. για την πλευρά α:

$$\beta-\gamma<\alpha<\beta+\gamma$$

Όμοια και για τις άλλες πλευρές του τριγώνου.

Εφαρμογή.



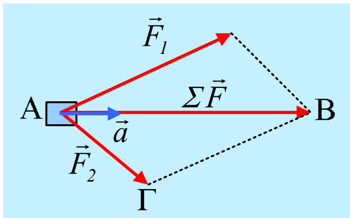
Σε ένα σώμα μάζας m=4kg, το οποίο ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ασκούνται δύο οριζόντιες δυνάμεις με μέτρα F_1=6N και F_2=10N, οι οποίες το μετακινούν κατά Δx=8m.

i) Ποιος ο ελάχιστος χρόνος για την παραπάνω μετατόπιση;

ii) Ποιος ο μέγιστος χρόνος που μπορεί να απαιτηθεί για την μετατόπιση αυτή;

iii) Αν οι δυο δυνάμεις είναι κάθετες μεταξύ τους, όπως στο σχήμα (σε κάτοψη), σε πόσο χρονικό διάστημα το σώμα θα διανύσει την απόσταση των 8m;

Απάντηση:

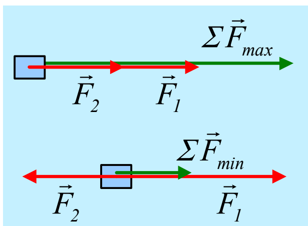


Όταν στο σώμα ασκηθούν οι δύο παραπάνω οριζόντιες δυνάμεις, θα επιταχυνθεί στη διεύθυνση της συνισταμένης, η οποία προκύπτει με τη μέθοδο του παραλληλογράμμου, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, για μια τυχαία γωνία μεταξύ τους. Αλλά τότε εστιάζοντας στο τρίγωνο ΑΒΓ, θα έχουμε για τις πλευρές του την παραπάνω ανισότητα:

$$(B\Gamma)-(A\Gamma)<(AB)<(B\Gamma)+(A\Gamma)$$

Ή για τα αντίστοιχα **μέτρα** των δυνάμεων:

$$F_1-F_2<\Sigma F<F_1+F_2$$



Αν τώρα οι δυνάμεις είναι συνευθειακές, παίρνουμε το μέγιστο και το ελάχιστο μέτρο για την συνισταμένη δύναμη, όπου:

$$\Sigma F_{max}=F_1+F_2 \quad \kappa\alpha\iota \quad \Sigma F_{min}=F_1-F_2$$

όπως στο διπλανό σχήμα.

Για την περίπτωση τώρα που το σώμα αποκτά μια σταθερή επιτάχυνση α, θα κινηθεί ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενα και η μετατόπισή του θα δίνεται από την εξίσωση:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2 \rightarrow t=\sqrt{\frac{2\Delta x}{a}} \quad (1)$$

i) Με βάση την παραπάνω εξίσωση (1) ο χρόνος κίνησης γίνεται ελάχιστος, όταν το σώμα αποκτά την μέγιστη δυνατή επιτάχυνση, πράγμα που συμβαίνει όταν η συνισταμένη δύναμη είναι μέγιστη. Αλλά τότε:

$$\Sigma F_{max}=ma_{max} \rightarrow a_{max}=\frac{\Sigma F_{max}}{m}=\frac{F_1+F_2}{m}=\frac{10+6}{4}m/s^2=4m/s^2$$

Και με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:

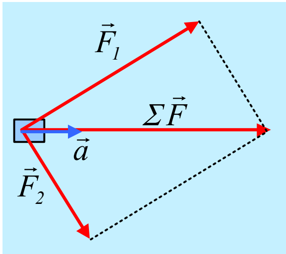
$$t_{min}=\sqrt{\frac{2\Delta x}{a_{max}}}=\sqrt{\frac{2\cdot 8}{4}}s=2s$$

ii) Με την ίδια λογική ο χρόνος κίνησης γίνεται μέγιστος, όταν έχουμε την ελάχιστη συνισταμένη:

$$\Sigma F_{min}=ma_{min} \rightarrow a_{min}=\frac{\Sigma F_{min}}{m}=\frac{F_1-F_2}{m}=\frac{10-6}{4}m/s^2=1m/s^2 \quad \text{και}$$

$$t_{max}=\sqrt{\frac{2\Delta x}{a_{min}}}=\sqrt{\frac{2\cdot 8}{1}}s=4s$$

iii) Με βάση τα προηγούμενα αποτελέσματα βλέπουμε ότι για το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να διανύσει το σώμα απόσταση 8m, θα ισχύει πάντα:



$$2s \le \Delta t \le 4s$$

Έτσι για παράδειγμα ας δούμε την περίπτωση των κάθετων δυνάμεων, όπου θα έχουμε, με τη χρήση του Πυθαγόρειου θεωρήματος:

$$\Sigma F=\sqrt{F_1^2+F_1^2}=\sqrt{10^2+6^2}N=\sqrt{136}N\approx 11{,}7N$$

Οπότε το σώμα αποκτά επιτάχυνση:

$$a_\kappa=\frac{\Sigma F}{m}=\frac{11{,}7}{4}m/s^2=2{,}9m/s^2$$

Και θα χρειαστεί χρόνο, ο οποίος υπολογίζεται από την εξίσωση (1):

$$t_\kappa=\sqrt{\frac{2\Delta x}{a_\kappa}}=\sqrt{\frac{2\cdot 8}{2{,}9}}s\approx 2{,}3s$$

Σχόλιο:

Προφανώς οι αριθμητικές πράξεις στο τελευταίο ερώτημα επιβάλλουν την χρησιμοποίηση υπολογιστικής μηχανής…

dmargaris@gmail.com