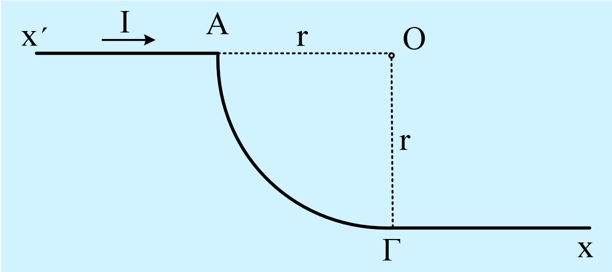
Τρία τμήματα αγωγού και το μαγνητικό τους πεδίο



Ένα αγωγός x΄ΑΓx, βρίσκεται στο επίπεδο της σελίδας και αποτελείται από δύο τμήματα x΄Α και Γx που είναι ευθύγραμμα πολύ μεγάλου μήκους και το τμήμα ΑΓ το οποίο είναι ένα τεταρτοκύκλιο κέντρου Ο και ακτίνας r=0,1m. Ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα έντασης Ι=2Α με φορά από το x΄ προς το x, όπως στο σχήμα.

i) Να αποδείξετε ότι το τμήμα x΄Α δεν δημιουργεί μαγνητικό πεδίο στο σημείο Ο, το οποίο βρίσκεται στην προέκτασή του.

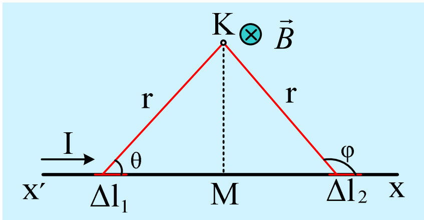
ii) Να βρεθεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο Ο, το οποίο οφείλεται στο τεταρτοκύκλιο ΑΓ.

iii) Να υπολογιστεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο Ο, που οφείλεται σε όλο τον αγωγό x΄ΑΓx.

Δίνεται $\mu_o=4\pi\times10^{-7}$Tm/A.

Απάντηση:

Λίγη θεωρία…



Αν έχουμε έναν ευθύγραμμο αγωγό, όπως στο διπλανό σχήμα x΄x, τότε το μαγνητικό που δημιουργεί ένα στοιχειώδες τμήμα Δl_1, στο σημείο Κ δίνεται από το νόμο των Bio-Savart:

$$dB_1=\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\cdot\Delta l_1}{r^2}\eta\mu\theta \quad (1)$$

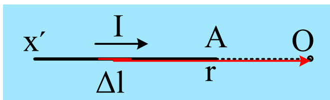
Με διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της σελίδας και φορά προς τα μέσα.

Αλλά τότε η ολική ένταση στο Κ εξαιτίας όλου του αγωγού, θα προκύπτει από την πρόσθεση όλων των στοιχειωδών dB_i τα οποία δημιουργούν τα αντίστοιχα στοιχειώδη τμήματα Δl_i, στα οποία μπορούμε να χωρίσουμε τον αγωγό:

$$B_K=dB_1+dB_2+\ldots dB_\nu=\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\cdot\Delta l_1}{r_1^2}\eta\mu\theta_1+\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\cdot\Delta l_2}{r_2^2}\eta\mu\theta_2+\ldots\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\cdot\Delta l_\nu}{r_\nu^2}\eta\mu\theta_\nu$$

Η παραπάνω εξίσωση γράφεται για συντομία:

$$B_K=\sum\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\cdot\Delta l_i}{r_i^2}\eta\mu\theta_i \quad (2)$$

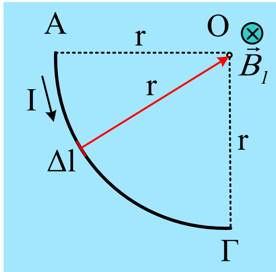


i) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα τυχαίο στοιχειώδες τμήμα Δl του τμήματος x΄Α. Για το σημείο Ο, στην προέκταση του αγωγού η εξίσωση (1) δίνει:

$$dB=\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\cdot\Delta l}{r^2}\eta\mu\theta=\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\cdot\Delta l}{r^2}\eta\mu0^o=0$$

Αλλά αν το τυχαίο τμήμα Δl δεν δημιουργεί μαγνητικό πεδίο στο σημείο Ο, δεν θα δημιουργεί κανένα τμήμα Δl_i , συνεπώς και το τμήμα x΄A δεν δημιουργεί μαγνητικό πεδίο σε όλα τα σημεία στην προέκτασή του, άρα και στο σημείο Ο.

ii) Για το μαγνητικό πεδίο στο σημείο Ο, με την λογική που αναφέραμε παραπάνω, χωρίζοντας το τόξο ΑΓ σε στοιχειώδη τμήματα Δl, θα πάρουμε με βάση την εξίσωση (2):

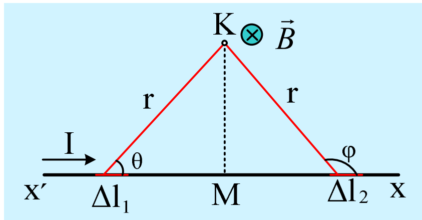


$$B_O=\sum\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\cdot\Delta l_i}{r_i^2}\eta\mu\theta_i=\sum\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\cdot\Delta l_i}{r^2}\eta\mu 90^o=\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I}{r^2}\sum\Delta l_i\rightarrow$$

$$B_1=\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I}{r^2}\cdot\frac{1}{4}2\pi r=\frac{1}{8}\frac{\mu_o I}{r}=\frac{1}{8}\frac{4\pi\times 10^{-7}\cdot 2}{0,1}T=\pi\cdot 10^{-6}T$$

Με διεύθυνση κάθετη στη σελίδα και φορά προς τα μέσα, όπως στο σχήμα.

iii) Πριν έρθουμε τώρα στο μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί το τμήμα Γx του αγωγού, ξεκινώντας από την εξίσωση (2) ας την εφαρμόσουμε στον αγωγό του διπλανού σχήματος (ο ίδιος με τον αγωγό που χρησιμοποιήσαμε και παραπάνω). Στο στοιχειώδες τμήμα Δl_1, αντιστοιχούμε το συμμετρικό του, ως προς το σημείο Μ, το τμήμα Δl_2, θα έχουμε:



$$dB_1=\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\cdot\Delta l_1}{r^2}\eta\mu\theta \quad \kappa\alpha\iota \quad dB_2=\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\cdot\Delta l_2}{r^2}\eta\mu\varphi$$

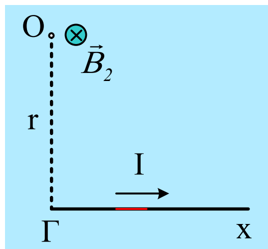
Αλλά οι γωνίες θ και φ είναι παραπληρωματικές, οπότε έχουν ίσα ημίτονα. Τότε όμως τα δύο αυτά στοιχειώδη τμήματα δημιουργούν ίσες εντάσεις μαγνητικού πεδίου στο σημείο Κ, $dB_1=dB_2$. Έτσι η εξίσωση (2) γράφεται:

$$B_K=\sum\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\cdot\Delta l_i}{r_i^2}\eta\mu\theta_i=\sum_{x'}^{M}\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\cdot\Delta l_i}{r_i^2}\eta\mu\theta_i+\sum_{M}^{x}\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\cdot\Delta l_i}{r_i^2}\eta\mu\varphi_i\rightarrow$$

$$B_K=2\sum_{M}^{x}\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\cdot\Delta l_i}{r_i^2}\eta\mu\varphi_i=2B_{Mx}\rightarrow$$

$$B_{Mx}=\frac{1}{2}B_{x'x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{2I}{\alpha}=\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I}{\alpha}\quad (3)$$

Η τελευταία εξίσωση μας λέει ότι το τμήμα Mx δημιουργεί στο σημείο Κ μαγνητικό πεδίο με ένταση ίση με το μισό της έντασης ενός ευθύγραμμου αγωγού απείρου μήκους. Έτσι ερχόμενοι τώρα στο τμήμα Γx του αγωγού μας, θα δημιουργεί στο κέντρο Ο ένταση μαγνητικού πεδίου, με μέτρο ίσο με το μισό της έντασης ενός αγωγού απείρου μήκους, οπότε από την (3):



$$B_2=\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I}{\alpha}=\frac{4\pi\cdot 10^{-7}}{4\pi}\frac{2}{0,1}T=2\cdot 10^{7}T$$

Συνεπώς η συνολική ένταση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο Ο, θα έχει την ίδια κατεύθυνση με τις εντάσεις $\vec{B}_1$ *και* $\vec{B}_2$ και μέτρο:

$$B_O = B_1 + B_2 = \pi \cdot 10^{-6}\,T + 10^{-7}\,T = 1,314 \cdot 10^{-7}\,T$$

dmargaris@gmail.com