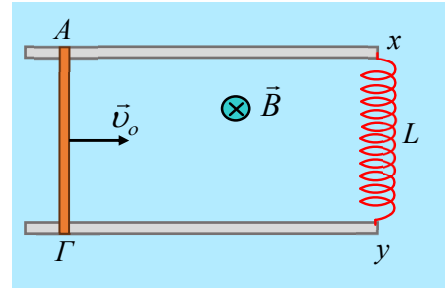


Κύκλωμα με επαγωγή και αυτεπαγωγή

Ο αγωγός ΑΓ, μήκους $l=1\text{m}$ και μάζας $m=0,4\text{kg}$ εκτοξεύεται μια στιγμή $t=0$, οριζόντια με αρχική ταχύτητα $v_0=2\text{m/s}$, όπως στο σχήμα (σε κάτοψη), σε επαφή με δύο οριζόντιους ευθύγραμμους αγωγούς, στα άκρα των οποίων έχουμε συνδέσει ένα ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής $L=0,1\text{H}$. Στο χώρο υπάρχει ένα κατακόρυφο μαγνητικό πεδίο έντασης $B=2\text{T}$, ενώ όλοι οι αγωγοί δεν παρουσιάζουν αντίσταση.



i) Αμέσως μετά την εκτόξευση, τη στιγμή $t=0^+$:

- a) Να υπολογισθεί η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή που αναπτύσσεται στο πηνίο και η επιτάχυνση του αγωγού ΑΓ.
- β) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητική ενέργειας του αγωγού ΑΓ, καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου του πηνίου.

ii) Σε μια επόμενη στιγμή t_1 ο αγωγός ΑΓ έχει ταχύτητα $v_1=1\text{m/s}$, ίδιας κατεύθυνσης, ενώ διαρρέεται από ρεύμα έντασης $i_1=2\sqrt{3}\text{A}$. Για την στιγμή αυτή να βρεθούν:

- a) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του αγωγού ΑΓ.
- β) Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου του πηνίου.

iii) Να επιβεβαιώσετε την διατήρηση της ενέργειας στο σύστημα στο χρονικό διάστημα $0-t_1$.

iv) Σε μια επόμενη στιγμή t_2 η ταχύτητα του αγωγού ΑΓ μηδενίζεται (πριν φτάσει στο πηνίο...). Για την στιγμή αυτή να βρεθούν:

- a) η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο, καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της έντασης di/dt .
- β) Η επιτάχυνση του αγωγού ΑΓ.

Απάντηση:

i) Μόλις εκτοξευθεί ο αγωγός ΑΓ, αναπτύσσεται πάνω του ΗΕΔ λόγω επαγωγής, με την πολικότητα που φαίνεται στο δίπλα σχήμα.

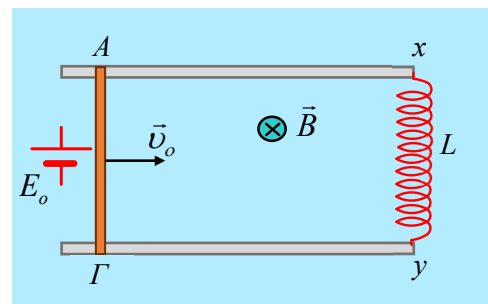
a) Για την ΗΕΔ πάνω στον αγωγό ΑΓ, έχουμε:

$$E_0 = Bv_0l = 2 \cdot 2 \cdot 1\text{V} = 4\text{V}$$

Εξαιτίας της παραπάνω ΗΕΔ το κλειστό κύκλωμα θα αρχί-

σει να διαρρέεται από ρεύμα, η ένταση του οποίου θα ξεκινήσει από μηδενική τιμή! Συνεπώς τη στιγμή $t=0^+$ θα έχουμε $i_0=0$. Αλλά τότε ο αγωγός δεν δέχεται κάποια δύναμη και έχει μηδενική επιτάχυνση.

β) Αφού δεν ασκείται κάποια οριζόντια δύναμη από το μαγνητικό πεδίο, δεν μεταβάλλεται η κινητική του



ενέργεια και $\frac{dK}{dt} = 0$, όπως επίσης δεν μεταφέρεται ενέργεια στο πηνίο και $\frac{dU_L}{dt} = 0$.

- ii) Τη στιγμή t_1 , πάνω στον αγωγό ΑΓ αναπτύσσεται μια ΗΕΔ με θετικό πόλο της το άκρο Α, ίση:

$$E_l = Bv_l l = 2 \cdot I \cdot IV = 2V$$

Ενώ ΗΕΔ λόγω αυτεπαγωγής αναπτύσσεται και στο πηνίο! Εφαρμόζοντας το 2^ο κανόνα του Kirchhoff στο κύκλωμα παίρνουμε:

$$E_l + E_L = 0 \rightarrow E_L = E_{avt,l} = -E_l = -2V$$

Όπου το (-) μας λέει ότι η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή έχει αντίθετη πολικότητα από την ΗΕΔ πάνω στον ΑΓ, όπως φαίνεται στο σχήμα (το «αντίθετης πολικότητας» σημαίνει ότι το πηνίο σαν πηγή, τείνει να δώσει ρεύμα αντίθετης φοράς στο κύκλωμα, από το ρεύμα έντασης i_1).

- α) Αφού ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα δέχεται δύναμη Laplace, όπου με βάση τον κανόνα των τριών δακτύλων βρίσκουμε ότι έχει φορά προς τα αριστερά, αντίθετης κατεύθυνσης από την ταχύτητα, επιβραδύνοντας τον αγωγό ΑΓ. Για τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του ΑΓ, έχουμε:

$$\frac{dK_l}{dt} = \frac{dW_{ολ}}{dt} = |F_{l,L}| \cdot |v_l| \cdot \cos 180^\circ = -|Bi_l l| \cdot |v_l| = -2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 1J/s = -4\sqrt{3}J/s$$

- β) Για την ισχύ του πηνίου (το ρυθμό που η «πηγή» E_{avt} παρέχει ενέργεια στο κύκλωμα), έχουμε:

$$P_{E_{avt,l}} = E_{avt,l} \cdot i_l = -2V \cdot 2\sqrt{3}A = -4\sqrt{3}W$$

Το αρνητικό πρόσημο της ισχύος, σημαίνει ότι το πηνίο, η «πηγή» μας, δεν προσφέρει ηλεκτρική ενέργεια στο κύκλωμα, αλλά αντιθέτως απορροφά ενέργεια, την οποία αποθηκεύει σαν ενέργεια στο μαγνητικό του πεδίο. Συνεπώς η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου αυξάνεται με ρυθμό:

$$\frac{dU_{L,l}}{dt} = -P_{E_{avt,l}} = +4\sqrt{3}J/s$$

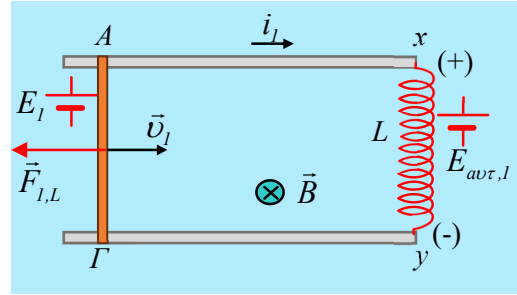
Αξίζει να προσέξουμε ότι όση είναι η μείωση της κινητικής ενέργειας του αγωγού ΑΓ, τόση ενέργεια αποθηκεύεται στο πηνίο, αυξάνοντας την ενέργεια του μαγνητικού του πεδίου.

- iii) Τη στιγμή της εκτόξευσης, η μόνη ενέργεια είναι η κινητική ενέργεια:

$$E_0 = K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}0,4 \cdot 2^2 J = 0,8J$$

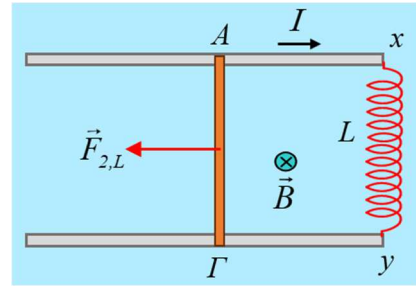
Τη χρονική στιγμή t_1 ενέργεια έχει και ο αγωγός ΑΓ (κινητική ενέργεια) και το πηνίο (ενέργεια μαγνητικού πεδίου), συνεπώς η ολική ενέργεια είναι ίση:

$$E_l = K_l + U_l = \frac{1}{2}mv_l^2 + \frac{1}{2}Li_l^2 = \frac{1}{2}0,4 \cdot I^2 J + \frac{1}{2}0,1 \cdot (2\sqrt{3})^2 J = 0,2J + 0,6J = 0,8J$$



Βλέπουμε ότι $E_0 = E_1$, η ενέργεια διατηρείται απλά ένα μέρος της κινητικής ενέργειας του αγωγού ΑΓ έχει μεταφερθεί στο πηνίο και έχει μετατραπεί σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου.

- iv) Με βάση το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι θα μεταφέρεται διαρκώς ενέργεια στο πηνίο, μέχρι να μηδενιστεί η κινητική ενέργεια του αγωγού ΑΓ και να μηδενιστεί η ταχύτητά του. Στη θέση αυτή η κατάσταση είναι αυτή το σχήματος, όπου η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή είναι μηδενική (όπως μηδενική είναι και η τάση στα άκρα του αγωγού ΑΓ), ενώ το κύκλωμα διαρρέεται από μέγιστη ένταση ρεύματος I και ο ΑΓ δέχεται δύναμη Laplace με μέγιστο μέτρο!



- α) Από την διατήρηση της ενέργειας παίρνουμε:

$$E_0 = E_2 \rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} L i_2^2 \xrightarrow{v_2=0} \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} L I^2 \rightarrow$$

$$I = v_0 \sqrt{\frac{m}{L}} = 2 \sqrt{\frac{0,4}{0,1}} A = 4 A$$

Η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή είναι ίση με την τάση στα άκρα του και ίση με την ΗΕΔ πάνω στον αγωγό ΑΓ. Αλλά αφού η ταχύτητα του αγωγού είναι μηδενική $E_{ΑΓ} = E_{avt} = 0$ οπότε:

$$E_{avt} = -L \frac{di}{dt} = 0 \rightarrow \frac{di}{dt} = 0$$

- β) Στον αγωγό ΑΓ ασκείται δύναμη Laplace, όπως στο σχήμα, με μέτρο $F_{2,L} = BIl$, οπότε ο αγωγός αποκτά επιτάχυνση προς τα αριστερά, μέτρου:

$$F_{2,L} = m a_2 \rightarrow BIl = m a_2 \rightarrow$$

$$a_2 = \frac{BIl}{m} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 1}{0,4} m / s^2 = 20 m / s^2$$

Σχόλιο:

Και αν κάποιος σκεφτεί ότι τελικά η κίνηση του αγωγού ΑΓ είναι αρμονική ταλάντωση, δίκιο θα έχει!!! Μια ταλάντωση όπου η ενέργεια μετατρέπεται από κινητική σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου και αντίστροφα.

dmargaris@gmail.com