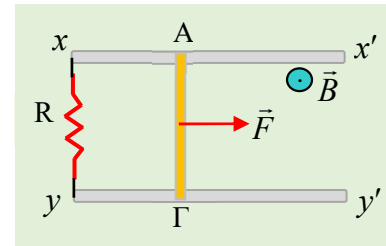


### Κάτι που θυμίζει αυτεπαγωγή

Ο αγωγός ΑΓ μήκους 1m, μάζας 0,25kg και αντίστασης  $r=0,5\Omega$  ηρεμεί σε επαφή με δύο παράλληλους οριζόντιους στύλους, χωρίς αντίσταση, ενώ στο χώρο υπάρχει ένα κατακόρυφο ομογενές μαγνητικό πεδίο, έντασης  $B=1T$ , όπως στο σχήμα (κάτοψη). Τα άκρα x και y των δύο στύλων συνδέονται μέσω ενός αντιστάτη  $R=1,5\Omega$ . Σε μια στιγμή  $t=0$  ασκείται στο μέσον του αγωγού ΑΓ μια σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου  $F=1N$ , κάθετη σε αυτόν, με αποτέλεσμα ο αγωγός να κινηθεί επιταχυνόμενος προς τα δεξιά.



- i) Να αποδείξετε ότι ο αγωγός θα κινηθεί με επιτάχυνση που συνεχώς θα μειώνεται, μέχρι να αποκτήσει μια σταθερή (οριακή) ταχύτητα, την οποία και να υπολογίσετε.
- ii) Να υπολογιστεί η μέγιστη και η ελάχιστη επιτάχυνση που αποκτά ο αγωγός ΑΓ. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της επιτάχυνσης του αγωγού ΑΓ, σε συνάρτηση με την ταχύτητά του.
- iii) Αφού αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι ανάλογος προς την επιτάχυνση του αγωγού ΑΓ, να βρεθεί ο παραπάνω ρυθμός αμέσως μετά την στιγμή  $t=0$ , καθώς και τη στιγμή  $t_1$  όπου ο αγωγός έχει ταχύτητα  $v_1=1m/s$ .
- iv) Αν τη στιγμή  $t_1$  πάψει να ασκείται η δύναμη F στον αγωγό:
  - α) Να υπολογιστεί η ένταση του ρεύματος και ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος, που διαρρέει τον αγωγό ΑΓ, ελάχιστα μετά τη στιγμή  $t_1$  (για  $t_1^+$ ).
  - β) Πόση ηλεκτρική ενέργεια θα εμφανιστεί στο κύκλωμα μετά τη στιγμή  $t_1$ ;
  - γ) Να χαράξετε ένα ποιοτικό διάγραμμα για την ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη R για όλο το χρονικό διάστημα που θα κινηθεί ο αγωγός ΑΓ.

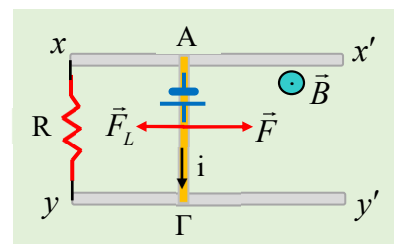
#### Απάντηση:

- i) Μόλις ο αγωγός ΑΓ κινηθεί προς τα δεξιά, θα αναπτυχθεί πάνω του μια ΗΕΔ από επαγωγή με θετικό άκρο το άκρο Γ ίση με  $E = Bvl$ , όπως στο σχήμα. Αλλά τότε ο αγωγός ΑΓ διαρρέεται από ρεύμα με φορά από το Α στο Γ με ένταση:

$$i = \frac{E}{R_{ολ}} = \frac{Bvl}{R+r} \quad (1)$$

Αποτέλεσμα είναι στον αγωγό ΑΓ να ασκείται δύναμη Laplace από το μαγνητικό πεδίο αντίθετης κατεύθυνσης από την ασκούμενη δύναμη F, μέτρου  $F_L = Bil$ . Εφαρμόζοντας τώρα για τον αγωγό ΑΓ το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής παίρνουμε:

$$\Sigma F = ma \rightarrow F - F_L = ma \rightarrow F - Bil = ma \rightarrow$$



$$F - \frac{B^2 l^2}{R+r} v = ma \quad (2)$$

Από την εξίσωση (2) καταλαβαίνουμε ότι καθώς επιταχύνεται ο αγωγός και η ταχύτητά του αυξάνεται η επιτάχυνσή του μειώνεται. Έτσι κάποια στιγμή η επιτάχυνση θα μηδενιστεί, ισοδύναμα η συνισταμένη δύναμη θα μηδενιστεί και ο αγωγός θα κινηθεί πια με σταθερή ταχύτητα, την οποία ονομάζουμε οριακή ταχύτητα. Για το μέτρο της από την σχέση (2) παίρνουμε:

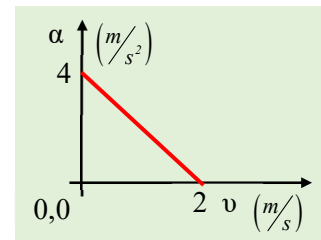
$$F - \frac{B^2 l^2}{R+r} v_{op} = ma = 0 \rightarrow$$

$$v_{op} = \frac{F(R+r)}{B^2 l^2} = \frac{I(1,5+0,5)}{I^2 \cdot I^2} m/s = 2 m/s$$

ii) Με αντικατάσταση στην (2)  $v=0$ , βρίσκουμε την μέγιστη επιτάχυνση:

$$F = ma_{max} \rightarrow a_{max} = \frac{F}{m} = \frac{I}{0,25} m/s^2 = 4 m/s^2$$

η οποία είναι η αρχική επιτάχυνση, ενώ, με βάση τα παραπάνω, η ελάχιστη επιτάχυνση είναι η μηδενική. Εξάλλου η συνάρτηση (1) περιγράφει μια ευθεία, οπότε η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι αυτή του διπλανού σχήματος.



iii) Για την μεταβολή της έντασης του ρεύματος μεταξύ δύο χρονικών στιγμών  $t_1$  και  $t_2$  έχουμε:

$$\Delta i = i_2 - i_1 = \frac{B v_2 l}{R+r} - \frac{B v_1 l}{R+r} = \frac{Bl}{R+r} (v_2 - v_1) = \frac{Bl}{R+r} \cdot \Delta v \rightarrow$$

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{Bl}{R+r} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{di}{dt} = \frac{Bl}{R+r} \cdot \frac{dv}{dt} \rightarrow$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{Bl}{R+r} \cdot a \quad (3)$$

Αλλά μόλις ασκηθεί στον αγωγό η δύναμη  $F$ , για  $t=0$ , ο αγωγός αποκτά μέγιστη επιτάχυνση, οπότε με βάση την εξίσωση (3) θα έχουμε και μέγιστο ρυθμό μεταβολής της έντασης του ρεύματος:

$$\left( \frac{di}{dt} \right)_0 = \frac{Bl}{R+r} \cdot a_0 = \frac{I \cdot I}{1,5+0,5} \cdot 4 A/s = 2 A/s$$

Εξάλλου τη στιγμή  $t_1$  ο αγωγός ΑΓ έχει επιτάχυνση (σχέση (2)):

$$F - \frac{B^2 l^2}{R+r} v_1 = ma_1 \rightarrow \alpha_1 = \frac{F}{m} - \frac{B^2 l^2}{m(R+r)} v_1 \rightarrow$$

$$\alpha_1 = \frac{I}{0,25} m/s^2 - \frac{I^2 \cdot I^2}{0,25(1,5+0,5)} \cdot 1 m/s^2 = 2 m/s^2$$

Οπότε με αντικατάσταση στην σχέση (3) βρίσκουμε:

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_I = \frac{Bl}{R+r} \cdot a_I = \frac{1 \cdot 1}{1,5+0,5} \cdot 2 \text{ A/s} = 1 \text{ A/s}$$

iv) Μόλις πάψει να ασκείται η δύναμη F, τη στιγμή  $t_1^+$ , η ταχύτητα του αγωγού δεν έχει αλλάξει (ακόμη!!!), οπότε δεν έχει αλλάξει ούτε η ΗΕΔ από επαγωγή  $E_1=1\text{V}$ , ούτε η ένταση του ρεύματος. Έτσι:

α) Έτσι για την ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό, έχουμε:

$$i_I = \frac{Bv_I l}{R+r} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{1,5+0,5} \cdot 1 \text{ A} = 0,5 \text{ A}$$

Εξάλλου ο αγωγός έχει επιτάχυνση με φορά προς τα αριστερά, λόγω της δύναμης Laplace:

$$a_{I+} = \frac{F_L}{m} = -\frac{Bi_I l}{m} = -\frac{1 \cdot 0,5 \cdot 1}{0,25} \text{ m/s}^2 = -2 \text{ m/s}^2$$

Με αποτέλεσμα να έχουμε για τον ζητούμενο ρυθμό, με βάση την εξίσωση (3):

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_+ = \frac{Bl}{R+r} \cdot a_{I+} = \frac{1 \cdot 1}{1,5+0,5} (-2) \text{ A/s} = -1 \text{ A/s}$$

β) Εξαιτίας της δύναμης Laplace ο αγωγός ΑΓ επιβραδύνεται, οπότε η κινητική του ενέργεια μετατρέπεται σε ηλεκτρική στο κύκλωμα και τελικά σε θερμότητας στις αντιστάσεις. Από την διατήρηση της ενέργειας έχουμε ότι η συνολική ηλεκτρική ενέργεια στο κύκλωμα, μετά την στιγμή  $t_1$  θα είναι ίση με την κινητική ενέργεια του αγωγού τη στιγμή  $t_1$ :

$$W_{\eta\lambda} = K_I = \frac{1}{2} m v_I^2 = \frac{1}{2} 0,25 \cdot 1^2 \text{ J} = 0,125 \text{ J}$$

γ) Με βάση την παραπάνω ανάλυση, ο αγωγός θα κινηθεί προς τα δεξιά με επιτάχυνση που θα μειώνεται με την πάροδο του χρόνου, πράγμα που σημαίνει ότι θα μειώνεται και η κλίση στο διάγραμμα της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο, για τον αγωγό ΑΓ. Εξάλλου μόλις σταματήσει να ασκείται η δύναμη F, ο αγωγός επιβραδύνεται από την δύναμη Laplace, όπου το μέτρο της μειώνεται, συνεπώς μειώνεται και το μέτρο της επιτάχυνσης, μέχρι να σταματήσει ο ΑΓ. Έτσι ένα ποιοτικό διάγραμμα για την μεταβολή της ταχύτητας του αγωγού ΑΓ, σε συνάρτηση με το χρόνο, έχει τη μορφή του πρώτου από τα παρακάτω διαγράμματα. Αλλά με βάση την εξίσωση (1) και η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα, θα έχει την ίδια μορφή, όπως φαίνεται στο δεξιό διάγραμμα.

