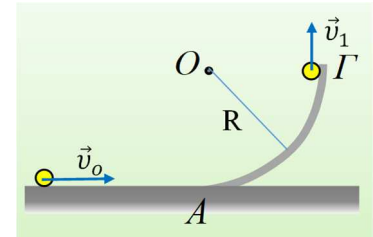


Οι μεταβολές ορμής και στροφορμής

Μια μικρή σφαίρα μάζας $0,2\text{kg}$ κινείται με σταθερή ταχύτητα $v_0=5\text{m/s}$ σε λείο οριζόντιο επίπεδο, χωρίς να περιστρέφεται. Σε μια θέση Α συναντά ένα κατακόρυφο κυκλικό οδηγό, κέντρου Ο και ακτίνας $R=0,8\text{m}$, στον οποίο συνεχίζει να κινείται χωρίς τριβές, οπότε μετά από λίγο περνά από την θέση Γ, όπου η ταχύτητά της γίνεται κατακόρυφη.

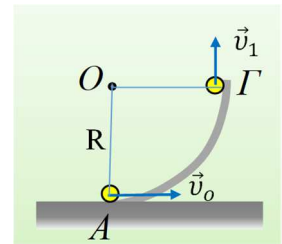


- i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα v_1 της σφαίρας στη θέση Γ.
- ii) Να βρεθεί η μεταβολή της ορμής της σφαίρας από το Α στο Γ, καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής στις θέσεις Α (αμέσως μόλις μπει στον κυκλικό οδηγό) και Γ.
- iii) Να βρεθεί ομοίως, η μεταβολή της στροφορμής της σφαίρας, ως προς το κέντρο Ο, μεταξύ Α και Γ και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής (ως προς το Ο) στις θέσεις Α και Γ.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- i) Θεωρώντας αμελητέα την ακτίνα της σφαίρας, μόλις μπει στον κυκλικό οδηγό, απέχει απόσταση R από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς, ενώ στη θέση Γ η αντίστοιχη ακτίνα είναι κάθετη στην ταχύτητα, συνεπώς οριζόντια. Άρα η σφαίρα στη θέση Γ βρίσκεται σε ύψος $h=R$ από το Α. Έτσι εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μεταξύ Α και Γ, δεχόμενοι ότι $U_A=0$, παίρνουμε:



$$K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_\Gamma^2 + mgR \rightarrow$$

$$v_\Gamma = \sqrt{v_0^2 - 2gR} = \sqrt{5^2 - 2 \cdot 10 \cdot 0,8} \text{ m/s} = 3 \text{ m/s}$$

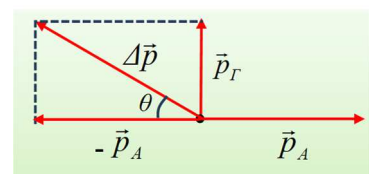
- ii) Για την μεταβολή της ορμής μεταξύ των θέσεων Α και Γ έχουμε:

$$\Delta \vec{p}_{A\Gamma} = \vec{p}_\Gamma - \vec{p}_A = \vec{p}_\Gamma + (-\vec{p}_A)$$

Οπότε το διάνυσμα της μεταβολής της ορμής, βρίσκεται με βάση το διπλανό σχήμα, όπου για το μέτρο της βρίσκουμε:

$$\Delta p = \sqrt{p_A^2 + p_\Gamma^2} = \sqrt{m^2 v_0^2 + m^2 v_\Gamma^2} = m\sqrt{v_0^2 + v_\Gamma^2} \rightarrow$$

$$\Delta p = 0,2\sqrt{5^2 + 3^2} \text{ kgm/s} = 0,2\sqrt{34} \text{ kgm/s}$$



Ενώ για την διεύθυνσή της έχουμε:

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{p_\Gamma}{p_A} = \frac{mv_\Gamma}{mv_0} = \frac{v_\Gamma}{v_0} = 0,6$$

Από τον γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα, έχουμε για τον ρυθμό μεταβολής της ορμής της σφαίρας:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F} \quad (1)$$

Στο διπλανό σχήμα έχουν σημειωθεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα στις θέσεις Α και Γ. Έτσι για την θέση Α θα έχουμε ο ρυθμός μεταβολής της ορμής να έχει διεύθυνση κατακόρυφη με φορά προς το Ο, όπως η κεντρομόλος δύναμη:

$$\frac{dp_A}{dt} = \Sigma F = N_o - w = m \frac{v_o^2}{R} = 0,2 \cdot \frac{5^2}{0,8} \text{ kgm} / \text{s}^2 = 6,25 \text{ kgm} / \text{s}^2.$$

Ενώ για την θέση Γ, ρόλο κεντρομόλου παίζει η αντίδραση του επιπέδου:

$$N_l = m \frac{v_l^2}{R} = 0,2 \cdot \frac{3^2}{0,8} \text{ N} = 2,25 \text{ N}.$$

Συνεπώς η συνισταμένη δύναμη έχει μέτρο ($w=mg=2\text{N}$):

$$\Sigma F = \sqrt{N_l^2 + w^2} = \sqrt{2,25^2 + 2^2} \text{ N} = 3 \text{ N}$$

Ενώ η διεύθυνσή της σχηματίζει με την ακτίνα γωνία φ , όπου:

$$\varepsilon \varphi = \frac{w}{N_l} = \frac{2}{2,25} \approx 0,9$$

Αλλά τότε με βάση την εξίσωση (1) και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής, έχει το ίδιο μέτρο και την ίδια διεύθυνση με την συνισταμένη, έτσι για το μέτρο του:

$$\frac{dp_\Gamma}{dt} = \Sigma F = 3 \text{ kgm} / \text{s}^2.$$

- iii) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα διανύσματα της στροφορμής της σφαίρας ως προς το κέντρο Ο, για τις δυο θέσεις, διανύσματα κάθετα στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα έξω. Ας θεωρήσουμε την κατεύθυνση αυτή ως θετική. Αφού τα δύο διανύσματα είναι συγγραμμικά, για την μεταβολή τους έχουμε:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{L}_{A\Gamma} &= \vec{L}_\Gamma - \vec{L}_A = m v_l R - m v_o R = m v_l R (v_l - v_o) \rightarrow \\ \Delta L_{A\Gamma} &= 0,2 \cdot 0,8 (3 - 5) \text{ kgm}^2 / \text{s} = -0,32 \text{ kgm}^2 / \text{s} \end{aligned}$$

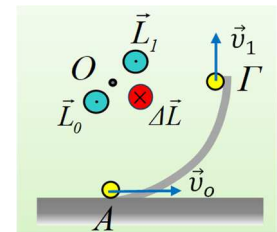
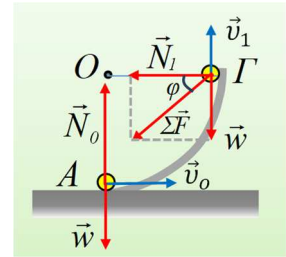
Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η μεταβολή της στροφορμής είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο της σελίδας, με φορά προς τα μέσα, όπως στο σχήμα.

Για το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής έχουμε:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau.$$

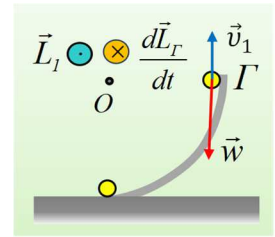
Αλλά τότε με βάση το παραπάνω σχήμα, όπου έχουν σχεδιαστεί οι ασκούμενες δυνάμεις στη σφαίρα, θα έχουμε:

$$\frac{dL_A}{dt} = (N - w) \cdot 0 = 0 \text{ και}$$



$$\frac{dL_{\Gamma}}{dt} = -w \cdot R = -2 \cdot 0,8 \text{ kgm}^2 / \text{s}^2 = -1,6 \text{ kgm}^2 / \text{s}^2$$

Στο διπλανό σχήμα βλέπετε τη στροφορμή και το ρυθμό μεταβολής της, ως προς το O, για την θέση Γ. Ο ρυθμός αυτό είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα μέσα.



dmargaris@gmail.com