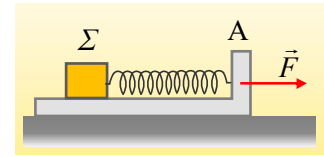


Το σύστημα και η ορμή του

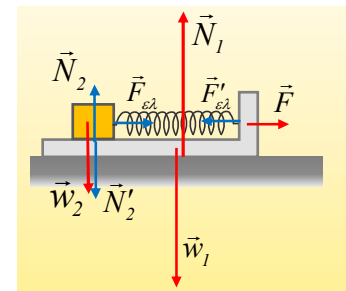
Ένα αμαξίδιο (A), μάζας $M=10\text{kg}$ ηρεμεί πάνω σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο, ενώ πάνω του ηρεμεί ένα σώμα Σ, μάζας $m=2\text{kg}$, δεμένο στο άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου, όπως στο σχήμα. Σε μια στιγμή $t=0$, ασκούμε στο αμαξίδιο μια σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F=10\text{N}$.



- i) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συστήματος. Κάποια στιγμή t_1 ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος Σ είναι ίσος $dp/dt=3\text{kgm/s}^2$. Ποιος ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής του αμαξιδίου (A) τη στιγμή αυτή;
- ii) Να βρεθεί η συνολική ορμή του συστήματος τη χρονική στιγμή $t_2=2\text{s}$.
- iii) Αν τη στιγμή t_2 το αμαξίδιο έχει ταχύτητα $v_1=1,6\text{m/s}$, ποια ταχύτητα έχει το σώμα Σ;
- iv) Τη στιγμή t_2 μηδενίζεται η ασκούμενη δύναμη F. Μετά από λίγο, τη στιγμή t_3 , το αμαξίδιο έχει ταχύτητα $u_1=1,7\text{m/s}$ και επιτάχυνση $a_1=-0,15\text{m/s}^2$. Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος Σ, την ίδια στιγμή t_3 .

Απάντηση:

Παίρνουμε σαν σύστημα μελέτης μας, τα δύο σώματα (A και Σ) και το αβαρές ελατήριο, το οποίο θα αντιμετωπίσουμε σαν ένα μέσον το οποίο μπορεί να ασκεί ίσου μέτρου δυνάμεις στα δύο σώματα. Στο σύστημα ασκούνται τα δυο βάρη και η κάθετη αντίδραση του επιπέδου N_1 (εξωτερικές δυνάμεις), δυνάμεις κατακόρυφες όπου το διανυσματικό τους άθροισμα $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \vec{N}_1 = 0$ είναι μηδενικό, αφού το σύστημα ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση.



Στο σχήμα, με μπλε χρώμα έχουν σχεδιαστεί και οι εσωτερικές δυνάμεις $\vec{N}_2 - \vec{N}'_2$ και οι δυο δυνάμεις από το ελατήριο $\vec{F}_{ελ} - \vec{F}'_{ελ}$.

- i) Ο γενικευμένος νόμος, εφαρμοζόμενος για το σύστημα στην οριζόντια διεύθυνση, μας δίνει:

$$\Sigma \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}_{o\lambda}}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta \vec{p}_{o\lambda}}{\Delta t} = (\vec{F}_{ελ} + \vec{F}'_{ελ}) + \vec{F}$$

Όμως $\vec{F}_{ελ} + \vec{F}'_{ελ} = 0$, οπότε η παραπάνω σχέση (αλγεβρικά) γράφεται:

$$\frac{\Delta p_{o\lambda}}{\Delta t} = F = 10\text{kg} \cdot \text{m/s}^2. \quad (1)$$

Ο ρυθμός αυτός παραμένει σταθερός, αφού ασκείται σταθερή δύναμη, οπότε η μέση τιμή του συμπίπτει και με την στιγμιαία τιμή του ρυθμού μεταβολής της ορμής:

$$\frac{\Delta p_{o\lambda}}{\Delta t} = \frac{dp_{o\lambda}}{dt} = 10\text{kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

Αλλά για το σύστημα, ο παραπάνω ρυθμός τη στιγμή t_1 γράφεται:

$$\frac{dp_{o\lambda}}{dt} = \frac{dp_A}{dt} + \frac{dp_\Sigma}{dt} \rightarrow \frac{dp_A}{dt} = \frac{dp_{o\lambda}}{dt} - \frac{dp_\Sigma}{dt} = 10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 - 3 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 7 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

ii) Παίρνοντας την εξίσωση (1) για το χρονικό διάστημα $0-t_2$ θα έχουμε:

$$\frac{\Delta p_{o\lambda}}{\Delta t} = F \rightarrow \frac{p_{o\lambda,2} - 0}{t_2 - 0} = F \rightarrow$$

$$p_{o\lambda,2} = F \cdot t_2 = 10 \cdot 2 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = 20 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

iii) Για την ορμή του συστήματος έχουμε τη στιγμή t_2 :

$$\vec{p}_{o\lambda,2} = \vec{p}_A + \vec{p}_\Sigma \rightarrow p_{o\lambda,2} = Mv_1 + mv_2 \rightarrow$$

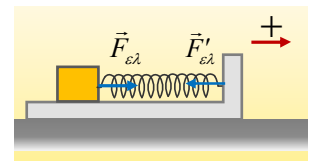
$$v_2 = \frac{p_{o\lambda,2} - Mv_1}{m} = \frac{20 - 10 \cdot 1,6}{2} \text{ m/s} = 2 \text{ m/s}$$

iv) Από τη στιγμή που καταργείται η δύναμη F , έχουμε πια ένα μονωμένο σύστημα. Οπότε εφαρμόζουμε για το σύστημα την αρχή διατήρησης της ορμής, μεταξύ των χρονικών στιγμών t_2 και t_3 :

$$\vec{p}_{o\lambda,2} = \vec{p}_{o\lambda,3} \rightarrow p_{o\lambda,2} = Mu_1 + mu_2 \rightarrow$$

$$u_2 = \frac{p_{o\lambda,2} - Mu_1}{m} = \frac{20 - 10 \cdot 1,7}{2} \text{ m/s} = 1,5 \text{ m/s}$$

Το αμαξίδιο επιταχύνεται από την δύναμη του ελατηρίου, οπότε θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική, παίρνουμε από το 2^ο νόμο του Νεύτωνα:



$$\Sigma \vec{F}_1 = M\vec{\alpha}_1 \rightarrow F'_{\varepsilon\lambda} = M\alpha_1 = 10 \cdot (-0,15) \text{ N} = -1,5 \text{ N}$$

Όπου η αρνητική αλγεβρική τιμή σημαίνει ότι έχει φορά προς τα αριστερά, όπως στο σχήμα.

Αλλά τότε στο σώμα Σ ασκείται δύναμη προς τα δεξιά $F_{\varepsilon\lambda} = 1,5 \text{ N}$ η οποία του προσδίδει επιτάχυνση:

$$\Sigma \vec{F}_2 = m\vec{\alpha}_2 \rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = m\alpha_2 \rightarrow$$

$$\alpha_2 = \frac{F_{\varepsilon\lambda}}{m} = \frac{1,5}{2} \text{ m/s}^2 = 0,75 \text{ m/s}^2.$$

dmargaris@gmail.com