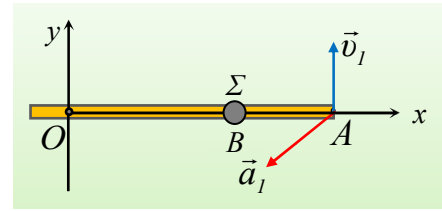


Η ράβδος και το υλικό σημείο

Μια ράβδος στρέφεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, γύρω από κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος περνά από ένα σημείο της O. Στο σημείο B της ράβδου έχει στερεωθεί ένα μικρό σώμα Σ, το οποίο θεωρούμε υλικό σημείο μάζας $m=0,4\text{kg}$, σε απόσταση $(AB)=0,5\text{m}$ από το άκρο A της ράβδου, παίρνοντας ένα στερεό s. Σε μια στιγμή t_1 η ράβδος βρίσκεται



στη θέση που δείχνει το διπλανό σχήμα (σε κάτοψη), ενώ το άκρο A έχει ταχύτητα μέτρου $v_1=4\text{m/s}$ και επιτάχυνση μέτρου $a_1=10\text{m/s}^2$, όπως στο σχήμα. Στο σχήμα έχει σημειωθεί επίσης και ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων x και y, ενώ δίνεται ότι $(OA)=2\text{m}$. Για την στιγμή t_1 :

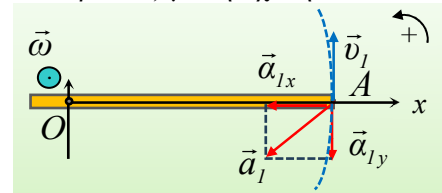
- i) Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα του στερεού s.
- ii) Να αναλυθεί η επιτάχυνση του άκρου A σε δύο συνιστώσες a_{1x} και a_{1y} , στις διευθύνσεις x και y. Ποιος ο ρόλος κάθε συνιστώσας;
- iii) Το σώμα Σ, δέχεται μια οριζόντια δύναμη από τη ράβδο $\vec{F}$. Να βρεθούν οι δυο συνιστώσες της δύναμης αυτής F_x και F_y , στις διευθύνσεις x και y.
- iv) Να βρεθεί η στροφορμή του σώματος Σ, κατά τον άξονα z, καθώς και ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του.

Απάντηση:

- i) Το άκρο A της ράβδου εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας $R=(OA)$ και το μέτρο της γραμμικής του ταχύτητας v_1 συνδέεται με την γωνιακή του ταχύτητα (και γωνιακή ταχύτητα του στερεού s) με τη σχέση:

$$v_1 = \omega R \rightarrow \omega = \frac{v_1}{R} = \frac{4}{2} \text{ rad/s} = 2 \text{ rad/s}$$

Διάνυσμα κατακόρυφο, πάνω στον άξονα z, με φορά προς τον αναγνώστη, όπως στο σχήμα.



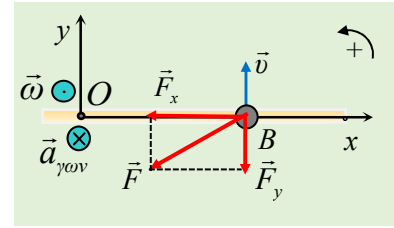
- ii) Αναλύουμε την επιτάχυνση a_1 του σημείου A στους δύο άξονες, όπως στο παραπάνω σχήμα, παίρνοντας τις συνιστώσες a_{1x} και a_{1y} . Η συνιστώσα a_{1x} είναι κάθετη στην ταχύτητα v_1 του σημείου A, είναι δηλαδή μια κεντρομόλος επιτάχυνση, υπεύθυνη για την αλλαγή στη διεύθυνση της ταχύτητας, έχοντας μέτρο:

$$a_{1x} = a_k = \frac{v_1^2}{R} = \frac{4^2}{2} \text{ m/s}^2 = 8 \text{ m/s}^2$$

Η άλλη συνιστώσα a_{1y} έχει την διεύθυνση της ταχύτητας (όχι κατεύθυνση, την διεύθυνση...) συνεπώς μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας και ονομάζεται επιτόρξια επιτάχυνση (πάνω στην τροχιά). Το μέτρο της μπορούμε να το βρούμε με εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος:

$$a_1^2 = a_{1x}^2 + a_{1y}^2 \rightarrow a_{1y} = \sqrt{a_1^2 - a_{1x}^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} \text{ m/s}^2 = 6 \text{ m/s}^2$$

- iii) Αφού βρήκαμε παραπάνω, ότι το σημείο Α έχει επιτρόχια επιτάχυνση, σημαίνει ότι μεταβάλλεται το μέτρο της ταχύτητας, πράγμα που μας λέει ότι μεταβάλλεται και η γωνιακή ταχύτητα ή ισοδύναμα το στερεό έχει γωνιακή επιτάχυνση, το μέτρο της οποίας συνδέεται με το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης με τη σχέση:



$$a_{ty} = \alpha_{γων} \cdot R \rightarrow \alpha_{γων} = \frac{a_{ty}}{R} = \frac{6}{2} \text{ rad} / \text{s}^2 = 3 \text{ rad} / \text{s}^2$$

Με διεύθυνση τον άξονα z και φορά προς τα μέσα, όπως στο σχήμα, αντίθετης φοράς από την γωνιακή ταχύτητα.

Εξάλλου και το υλικό σημείο Σ εκτελεί κυκλική κίνηση με ακτίνα $r=1,5\text{m}$, με την ίδια γωνιακή ταχύτητα και γωνιακή επιτάχυνση του στερεού s. Στο σχήμα έχει σχεδιαστεί η οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ που δέχεται το υλικό σημείο Σ από τη ράβδο και τις δυο συνιστώσες της, για τα μέτρα των οποίων έχουμε:

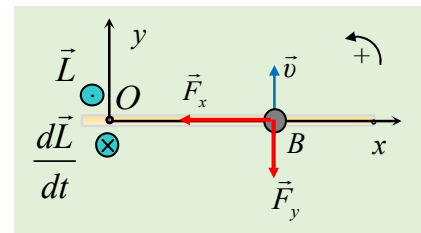
$$F_x = ma_x = ma_c = m \cdot \omega^2 r = 0,4 \cdot 2^2 \cdot 1,5 \text{ N} = 2,4 \text{ N}$$

$$F_y = ma_y = m \cdot (a_{γων} r) = 0,4 \cdot 3 \cdot 1,5 \text{ N} = 1,8 \text{ N}$$

- iv) Η στροφορμή του υλικού σημείου Σ έχει την διεύθυνση του άξονα z, φορά προς τον αναγνώστη, όπως στο σχήμα, με μέτρο:

$$L = mvr = mr^2 \omega = 0,4 \cdot 1,5^2 \cdot 2 \text{ kgm}^2 / \text{s} = 1,8 \text{ kgm}^2 / \text{s}.$$

Ενώ ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του Σ, έχει μέτρο:



$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau = \tau_{F_x} + \tau_{F_y} = 0 + F_y \cdot r = 1,8 \cdot 1,5 \text{ kgm}^2 / \text{s}^2 = 2,7 \text{ kgm}^2 / \text{s}^2.$$

Ενώ το διάνυσμα του ρυθμού, έχει την διεύθυνση του άξονα z και φορά προς τα κάτω (στο σχήμα προς το εσωτερικό μέρος της σελίδας).

Μιλώντας με αλγεβρικές τιμές, θεωρώντας την αριστερόστροφη φορά ως θετική φορά περιστροφής (ισοδύναμα θετική την γωνιακή ταχύτητα), η στροφορμή έχει θετική αλγεβρική τιμή ενώ ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι αρνητικός.

dmargaris@gmail.com