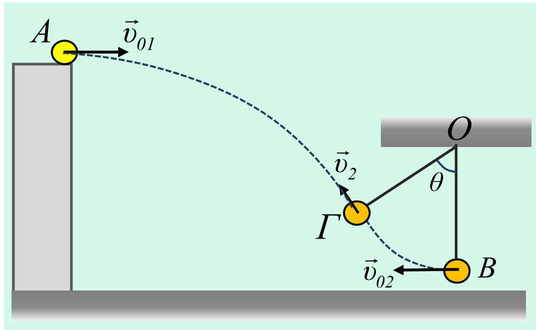
Κυκλική κίνηση- οριζόντια βολή και κρούση

Μια μικρή σφαίρα Α εκτοξεύεται οριζόντια με αρχική ταχύτητα $υ_{01}$=6m/s από ορισμένο ύψος από το έδαφος. Μια δεύτερη σφαίρα Β μάζας m_2=1kg είναι δεμένη στο άκρο νήματος μήκους l=2m, το άλλο άκρο του οποίου έχει δεθεί σε σταθερό σημείο Ο και διαγράφει κατακόρυφο κύκλο. Τη στιγμή που το νήμα είναι κατακόρυφο η σφαίρα Β έχει ταχύτητα $υ_{02}$=5m/s, ενώ μετά από λίγο φτάνει στη θέση Γ, όπου το νήμα σχηματίζει με την κατακόρυφη γωνία θ, όπου ημθ=0,8 και συνθ=0,6.



i) Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας Β στη θέση Γ, καθώς και η τάση του νήματος στη θέση αυτή.

Στη θέση αυτή το νήμα κόβεται, ενώ ταυτόχρονα οι δυο σφαίρες συγκρούονται πλαστικά, με αποτέλεσμα το συσσωμάτωμα να αποκτά μηδενική ταχύτητα αμέσως μετά την κρούση.

ii) Να υπολογιστεί η μάζα της Α σφαίρας.

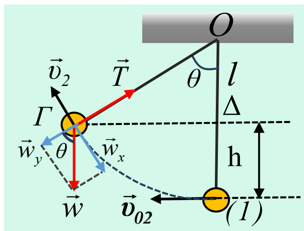
iii) Να υπολογιστεί η διάρκεια της οριζόντιας βολής που εκτέλεσε η Α σφαίρα.

iv) Να υπολογιστεί η απώλεια της μηχανικής ενέργειας στη διάρκεια της κρούσης.

Δίνεται g=10m/s^2.

Απάντηση:

i) Θεωρώντας μηδενική τη δυναμική ενέργεια της σφαίρας Β, στο κατώτερο σημείο της τροχιάς της (θέση 1), εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, οπότε έχουμε:



$$K_1 + U_1 = K_Γ + U_Γ \rightarrow \frac{1}{2}m_2υ_{02}^2 + 0 = \frac{1}{2}m_2υ_2^2 + m_2gh$$

$$Αλλά\ έχουμε\quad h = l-(ΟΔ) = l(1-συνθ)\ \ οπότε:$$

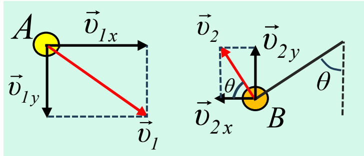
$$υ_2 = \sqrt{υ_{02}^2 - 2gl(1-συνθ)} = \sqrt{5^2 - 2\cdot 10\cdot 2(1-0,6)}m/s = 3m/s$$

Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιασθεί οι δυνάμεις στη σφαίρα Β στην θέση (Γ) και έχουμε αναλύσει το βάρος σε δύο συνιστώσες. Η συνισταμένη στη διεύθυνση της ακτίνας παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου, από όπου παίρνουμε:

$$ΣF_R = m_2\frac{υ_2^2}{R} \rightarrow T - w_y = m_2\frac{υ_2^2}{R} \rightarrow T = m_2gσυνθ + m_2\frac{υ_2^2}{l}$$

$$T = 0,5\cdot 10\cdot 0,6N + 0,5\frac{3^2}{2}N = 5,25N$$

ii) Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι ταχύτητες των δύο σφαιρών ελάχιστα πριν την κρούση (και ας τις έχουμε σχεδιάσει σε… απόσταση, για λόγους ανάγνωσης της εικόνας…), τις οποίες έχουμε αναλύσει



σε συνιστώσες οριζόντιες (άξονας x) και κατακόρυφες (άξονας y).

Για τις συνιστώσες της ταχύτητας της Β σφαίρας έχουμε:

$$\upsilon_{2x} = \upsilon_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 3 \cdot 0,6m/s = 1,8m \quad \kappa\alpha\iota$$
$$\upsilon_{2y} = \upsilon_2 \cdot \eta\mu\theta = 3 \cdot 0,8m/s = 2,4m$$

Εφαρμόζουμε για την κρούση της αρχή διατήρησης της ορμής, θεωρώντας το σύστημα μονωμένο (ουσιαστικά θεωρούμε ακαριαία την κρούση και αμελητέες της δυνάμεις των βαρών σε σύγκριση με τις δυνάμεις που αναπτύσσονται λόγω κρούσης) και παίρνουμε:

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \rightarrow \begin{cases} p_{x,\pi\rho\iota\nu} = p_{x,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \rightarrow m_1\upsilon_{1x} - m_2\upsilon_{2x} = 0 \quad (1) \\ p_{y,\pi\rho\iota\nu} = p_{y,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \rightarrow m_2\upsilon_{1y} - m_2\upsilon_{2y} = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Από την εξίσωση (1) λαμβάνοντας υπόψη ότι $\upsilon_{1x}=\upsilon_0$ αφού κατά την οριζόντια βολή της σφαίρας Α δεν μεταβάλλεται η οριζόντια ταχύτητά της, παίρνουμε:

$$m_1 = \frac{m_2\upsilon_{2x}}{\upsilon_{1x}} = \frac{1 \cdot 1,8}{6}kg = 0,3kg$$

iii) Κατά τη διάρκεια της οριζόντιας βολής θεωρούμε ότι στην κατακόρυφη διεύθυνση η σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση, οπότε η ταχύτητά της δίνεται από την εξίσωση $\upsilon_y=gt$. Αλλά από την εξίσωση(2) βρίσκουμε:

$$m_1\upsilon_{1y} - m_2\upsilon_{2y} = 0 \rightarrow \upsilon_{1y} = \frac{m_2\upsilon_{2y}}{m_1} = \frac{1 \cdot 2,4}{0,3}m/s = 8m/s \rightarrow$$
$$\upsilon_{1y} = gt_1 \rightarrow t_1 = \frac{\upsilon_{1y}}{g} = \frac{8}{10}s = 0,8s$$

iv) Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας κατά την κρούση, είναι ίση με την μείωση της κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σφαιρών. Οι δυναμικές ενέργειες δεν μεταβάλλονται στη διάρκεια της κρούσης, αφού θεωρούμε ακαριαία κρούση στη διάρκεια της οποίας τα σώματα δεν αλλάζουν θέση.

$$\Delta E_\mu = K_1 + K_2 - K_{\sigma\upsilon\sigma} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 - 0 \rightarrow$$
$$\Delta E_\mu = \frac{1}{2}m_1\left(\upsilon_{1x}^2 + \upsilon_{1y}^2\right) + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}0,3 \cdot \left(6^2 + 8^2\right)J + \frac{1}{2}1 \cdot 3^2 J = 19,5J$$

dmargaris@gmail.com