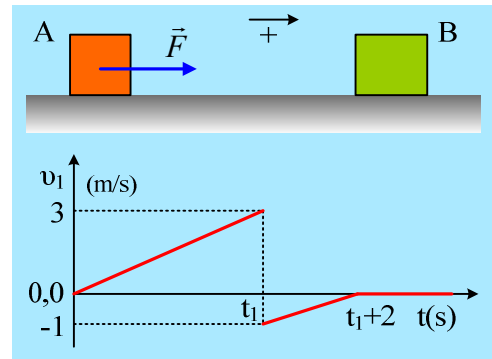


Επιμένουμε ενεργειακά!

Ένα σώμα Α μάζας $m_1=2\text{kg}$, ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή $t_0=0$, στο σώμα ασκείται μια σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F=2,5\text{N}$, μέχρι τη στιγμή t_1 , όπου η δύναμη παύει να ασκείται και το σώμα συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα Β. Στο σχήμα δίνεται η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Α σε συνάρτηση με το χρόνο, όπου η κρούση θεωρείται ακαριαία.



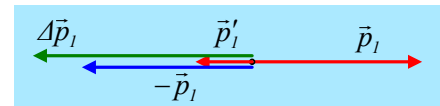
- Να υπολογισθεί η μεταβολή της ορμής του σώματος Α, στη διάρκεια της κρούσης και η αντίστοιχη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας.
- Αφού εξηγήσετε (χωρίς μαθηματική απόδειξη), γιατί το σώμα Α παρουσιάζει τριβή με το επίπεδο, στη συνέχεια να υπολογίσετε το μέτρο της ασκούμενης τριβής.
- Χωρίς να χρησιμοποιήσετε τις εξισώσεις κίνησης του σώματος Α, να βρείτε:
 - Την ενέργεια που μεταφέρεται στο σώμα Α, μέσω του έργου της δύναμης F.
 - Τη χρονική στιγμή t_1 που έγινε η κρούση.
- Να υπολογιστεί η μάζα του σώματος Β και στη συνέχεια να κάνετε το διάγραμμα της ταχύτητάς του σε συνάρτηση με το χρόνο, με δεδομένο ότι τα δυο σώματα παρουσιάζουν τον ίδιο συντελεστή τριβής με το επίπεδο.

Απάντηση:

- Θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική, έχουμε για την μεταβολή της ορμής του σώματος Α, έχουμε:

$$\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}'_1 - \vec{p}_1 \rightarrow \Delta p_1 = p'_1 - p_1 = m_1 v'_1 - m_1 v_1 \rightarrow$$

$$\Delta p_1 = 2 \cdot (-1) \text{ kgm/s} - 2 \cdot 3 \text{ kgm/s} = -8 \text{ kgm/s}$$



Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η κατεύθυνση της μεταβολής της ορμής, είναι προς τα αριστερά, (προς την αρνητική κατεύθυνση), αντίθετη της ασκούμενης δύναμης F.

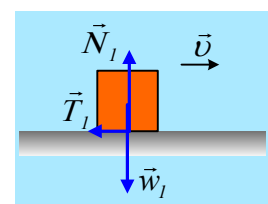
Για την μεταβολή της κινητικής ενέργειας (ένα μονόμετρο μέγεθος), έχουμε:

$$\Delta K_1 = K'_1 - K_1 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 - \frac{1}{2} m_1 v^2_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (1^2 - 3^2) \text{ J} = -8 \text{ J}$$

Όπου το αρνητικό πρόσημο σημαίνει την μείωση της κινητικής ενέργειας του σώματος.

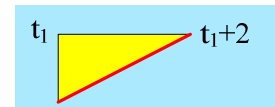
- Με βάση το διάγραμμα της ταχύτητας, μετά την κρούση, το σώμα Α επιβραδύνεται και μετά από 2s σταματά. Αφού η δύναμη F, δεν ασκείται πια πάνω του, μόνο η ύπαρξη τριβής θα μπορούσε να ακινητοποιήσει το σώμα.

Στη διάρκεια της κίνησης αυτής το σώμα μετατοπίζεται κατά $\Delta x'_1$ ίσο με το



εμβαδόν του κίτρινου τριγώνου στο διάγραμμα v-t:

$$\Delta x'_I = \frac{1}{2}(-1) \cdot 2m = -1m$$



Εφαρμόζοντας τώρα το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.) για την παραπάνω κίνηση του σώματος Α, παίρνουμε:

$$K_{I, \text{τελ}'} - K_{I, \text{αρχ}'} = W_{w_I} + W_{N_I} + W_{T_I} \xrightarrow{W_{w_I} = W_{N_I} = 0} 0 - \frac{1}{2} m_I v_I'^2 = -T_I \cdot \Delta x'_I \rightarrow$$

$$T_I = \frac{m_I v_I'^2}{2 \Delta x'_I} = \frac{2 \cdot 1^2}{2 \cdot 1} N = 1 N$$

iii) Αν $\Delta \bar{x}_I$ η μετατόπιση του σώματος Α στη διάρκεια της επιτάχυνσης του σώματος Α, εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. στη διάρκεια αυτής της κίνησης, παίρνουμε:

$$K_{I, \text{τελ}} - K_{I, \text{αρχ}} = W_{w_I} + W_{N_I} + W_F + W_{T_I} \xrightarrow{W_{w_I} = W_{N_I} = 0}$$

$$\frac{1}{2} m_I v_I^2 - 0 = F \cdot \Delta x_I - T \cdot \Delta x_I \rightarrow$$

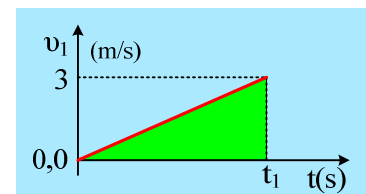
$$\Delta x_I = \frac{m_I v_I^2}{2(F - T)} = \frac{2 \cdot 3^2}{2(2,5 - 1)} m = 6 m$$

α) Αλλά τότε το έργο της δύναμης είναι ίσο:

$$W_F = F \cdot \Delta x_I = 2,5 \cdot 6 J = 15 J$$

β) Η παραπάνω μετατόπιση του σώματος Α είναι αριθμητικά ίση με το εμβαδόν του πράσινου τριγώνου, στο διάγραμμα v-t. Οπότε:

$$\Delta x_I = \frac{1}{2} t_I \cdot v_I \xrightarrow{S.I.} 6 = \frac{1}{2} t_I \cdot 3 \rightarrow t_I = 4 s$$



iv) Για τις ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κεντρική ελαστική κρούσης τους έχουμε:

$$v'_I = \frac{m_I - m_2}{m_I + m_2} v_I \quad \text{και} \quad v'_2 = \frac{2m_I}{m_I + m_2} v_I$$

Με αντικατάσταση στην πρώτη εξίσωση παίρνουμε:

$$v'_I = \frac{m_I - m_2}{m_I + m_2} v_I \xrightarrow{S.I.} -1 = \frac{2 - m_2}{2 + m_2} 3 \rightarrow m_2 = 4 kg$$

Ενώ με αντικατάσταση στην δεύτερη εξίσωση βρίσκουμε:

$$v'_2 = \frac{2m_I}{m_I + m_2} v_I = \frac{2 \cdot 2}{2 + 4} 3 m/s = 2 m/s$$

Ένα σώμα (είτε το Α είτε το Β...) που ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο αποκτά επιτάχυνση, λόγω της τριβής, **μέτρου**:

$$\Sigma F_x = Ma \rightarrow T = M|\alpha| \rightarrow \mu Mg = M|\alpha| \rightarrow |\alpha| = \mu g$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η επιτάχυνση δεν εξαρτάται από την μάζα, οπότε εδώ τα δυο σώματα επιβραδύνονται με την ίδια επιτάχυνση, αλλά τότε για τις δυο ταχύτητες, στη διάρκεια της κίνησης θα ισχύει η εξίσωση:

$$u = u_0 - |a| \cdot \Delta t \xrightarrow{u=0} \Delta t_{0i} = \frac{u_0}{|a|} \rightarrow \Delta t_1 = \frac{v'_1}{|a|} \quad (1) \quad \text{και} \quad \Delta t_2 = \frac{v'_2}{|a|} \quad (2)$$

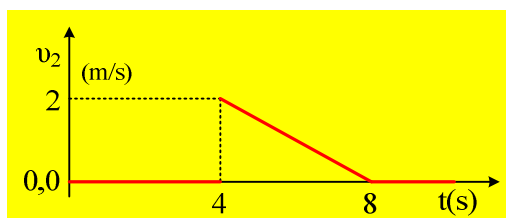
Με διαίρεση των (2) και (1) κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{v'_2}{v'_1} \rightarrow \Delta t_2 = \Delta t_1 \cdot \frac{v'_2}{v'_1} = 2 \cdot \frac{2}{1} s = 4s$$

Συνεπώς το Β σώμα ξεκίνησε να κινείται τη στιγμή $t_1=4s$ με ταχύτητα $v'_2 = 2m/s$ και μηδενίστηκε η ταχύτητά του τη στιγμή $t_2=8s$, ενώ η ταχύτητα μεταβάλλεται γραμμικά αφού η εξίσωση της ταχύτητας ικανοποιεί την εξίσωση

$$u = v'_2 - |a| \cdot \Delta t = v'_2 - |a| \cdot (t - t_1)$$

Συνεπώς το ζητούμενο διάγραμμα έχει τη μορφή του σχήματος:



dmargaris@gmail.com