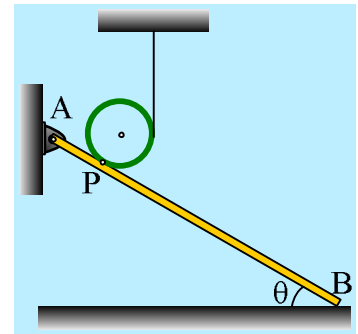


Μας λείπει η δυναμική του στερεού...

Κυκλική στεφάνη μάζας $M = 4\text{kg}$ είναι ακίνητη πάνω σε μια δοκό AB, στο σημείο P. Το άνω άκρο της δοκού A συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο, ενώ το κάτω άκρο της ακουμπά σε λείο οριζόντιο δάπεδο σχηματίζοντας γωνία θ με αυτό, όπου $\eta\mu\theta = 0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = 0,8$. Η ισορροπία της στεφάνης εξασφαλίζεται από κατακόρυφο νήμα που εφάπτεται στη στεφάνη, όπως στο σχήμα.



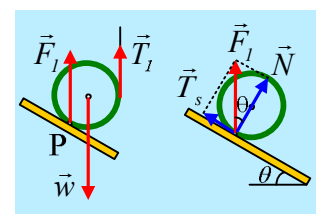
- i) Να αποδείξετε ότι η στεφάνη δέχεται κατακόρυφη δύναμη από την δοκό και να υπολογίσετε τις συνιστώσες της, μια κάθετη και μια παράλληλη στην επιφάνεια της δοκού.
- ii) Σε μια στιγμή $t_0=0$ κόβουμε το νήμα, οπότε η στεφάνη κυλιέται (χωρίς να ολισθαίνει) κατά μήκος της δοκού.
 - α) Κάποιος συμμαθητής σας υποστηρίζει ότι στη διάρκεια της κίνησης της στεφάνης ασκείται τριβή ολίσθησης πάνω της από την σανίδα. Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με την άποψη αυτή;
 - β) Κάποιος άλλος συμμαθητής σας υποστηρίζει αντίθετα, ότι κατά την κύλιση δεν ασκείται τριβή στην στεφάνη. Σας βρίσκει σύμφωνο η θέση αυτή ή όχι και γιατί;
- iii) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του κέντρου O της στεφάνης, τη χρονική στιγμή $t_1=2\text{s}$.
- iv) Αφού υπολογίστε τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στη στεφάνη, στη διάρκεια της κίνησης, να υπολογιστούν τα έργα των δυνάμεων αυτών από 0- t_1 . Πόση είναι η κινητική ενέργεια της στεφάνης τη στιγμή t_1 ;
- v) «Στη διάρκεια της κύλισης, η άρθρωση ασκεί στο άκρο A της δοκού μια κατακόρυφη δύναμη F». Χωρίς να προβείτε σε ακριβείς υπολογισμούς δυνάμεων, να εξετάσετε αν αυτό είναι σωστό ή λάθος.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$, ενώ το μήκος της δοκού είναι αρκετά μεγάλο, ώστε η στεφάνη να παραμένει πάνω της τη στιγμή t_1 .

Απάντηση:

- i) Στο πρώτο από τα διπλανά σχήματα, έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη στεφάνη, όπου F_1 η δύναμη από την δοκό και T_1 η τάση του νήματος. Από την ισορροπία της δοκού παίρνουμε:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \rightarrow \vec{F}_1 + \vec{T}_1 + \vec{w} = 0 \rightarrow \vec{F}_1 = -(\vec{T}_1 + \vec{w}) \quad (1)$$



Για να ισχύει η παραπάνω σχέση, αφού βάρος και T_1 είναι κατακόρυφες δυνάμεις, κατακόρυφη θα είναι και η συνισταμένη τους, συνεπώς και η αντίθετή της (η δύναμη F_1) θα είναι επίσης κατακόρυφη.

Στο δεξιό σχήμα η δύναμη F_1 έχει αναλυθεί σε δύο συνιστώσες της στατική τριβή T_s και την κάθετη αντίδραση από την δοκό N. Παίρνοντας την συνθήκη ισορροπίας για την στεφάνη, έχουμε για τις ροπές ως προς το κέντρο της O:

$$\Sigma \vec{\tau} = 0 \rightarrow T_l \cdot R + w \cdot 0 - T_s \cdot R = 0 \rightarrow T_l = T_s = F_l \cdot \eta \mu \theta$$

Οπότε από την (1) παίρνουμε:

$$F_l + T_l = w \rightarrow F_l + F_l \cdot \eta \mu \theta = M g \rightarrow$$

$$F_l = \frac{Mg}{1 + \eta \mu \theta} = \frac{4 \cdot 10 N}{1 + 0,6} = 25 N \rightarrow$$

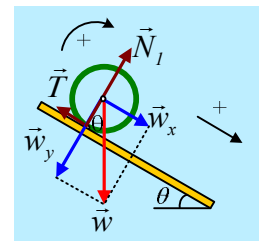
$$T_s = F_l \cdot \eta \mu \theta = 25 \cdot 0,6 N = 15 N \quad \text{και} \quad N = F_l \cdot \sigma \upsilon \nu \theta = 25 \cdot 0,8 N = 20 N$$

ii) Και οι δύο προαναφερόμενες απόψεις είναι λανθασμένες.

α) Αφού η στεφάνη κυλιέται το εκάστοτε σημείο επαφής της με την δοκό έχει μηδενική ταχύτητα. Αλλά τότε δεν έχουμε ολίσθηση για να εμφανιστεί και τριβή ολίσθησης.

β) Αν υποθέσουμε ότι δεν αναπτύσσεται τριβή, τότε η στεφάνη επιταχύνεται μόνο από το βάρος, δύναμη που διέρχεται από το κέντρο μάζας της. Τότε όμως δεν θα έχουμε κάποια ροπή που να προκαλεί την περιστροφή της στεφάνης, η οποία θα εκτελούσε μεταφορική κίνηση.

Δεν μένει παρά να ασκείται στη στεφάνη δύναμη **στατικής** τριβής (τώρα T) από την δοκό, όπως στο σχήμα, η ροπή της οποίας προκαλεί και την «δεξιόστροφη» περιστροφή της στεφάνης.



iii) Θεωρώντας την κίνηση της στεφάνης σύνθετη, μια μεταφορική και μια περιστροφική γύρω από άξονα, ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας και διέρχεται από το κέντρο μάζας O, εφαρμόζουμε το 2^ο νόμο του Νεύτωνα, τόσο για την μεταφορική όσο και για την στροφική κίνηση της στεφάνης.

$$\Sigma F_x = M a_{cm} \rightarrow Mg \cdot \eta \mu \theta - T = M a_{cm} \quad (2)$$

$$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma \omega \nu} \rightarrow T R = M R^2 a_{\gamma \omega \nu} \rightarrow T = M R a_{\gamma \omega \nu} \xrightarrow{a_{cm} = a_{\gamma \omega \nu} R} T = M a_{cm} \quad (3)$$

$$\text{από (2) και (3)} \quad a_{cm} = \frac{1}{2} g \eta \mu \theta = \frac{1}{2} 10 \cdot 0,6 m / s^2 = 3 m / s^2$$

Αλλά τότε το κέντρο μάζας O τη στιγμή t_1 έχει ταχύτητα:

$$v_{cm1} = a_{cm} t_1 = 3 \cdot 2 m / s = 6 m / s$$

Έχοντας μετατοπισθεί κατά:

$$\Delta x_{cm1} = \frac{1}{2} a_{cm} t_1^2 = \frac{1}{2} 3 \cdot 2^2 m = 6 m$$

iv) Από την ισορροπία της στεφάνης στη διεύθυνση y, την κάθετη στη δοκό, παίρνουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N_l = w_y = Mg \cdot \sigma \upsilon \nu \theta = 4 \cdot 10 \cdot 0,8 N = 32 N$$

Η δύναμη αυτή είναι κάθετη στη μετατόπιση συνεπώς δεν παράγει έργο.

Το μέτρο της ασκούμενης **στατικής** τριβής T, υπολογίζεται από την εξίσωση (3):

$$T = M a_{cm} = 4 \cdot 3 N = 12 N$$

Αλλά, όπως είπαμε και παραπάνω, η δύναμη αυτή ασκείται σε ένα ακίνητο σημείο της στεφάνης, οπότε και αυτή ΔΕΝ παράγει έργο.

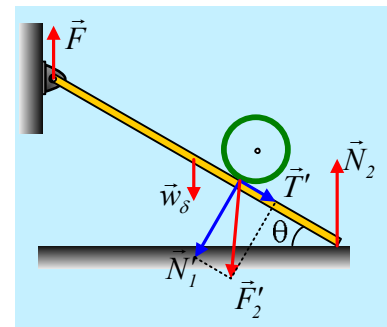
Δεν μένει παρά το βάρος $w=Mg=40N$, όπου παράγει έργο:

$$W_w = W_{w_x} = Mg \cdot \eta \mu \theta \cdot \Delta x = 4 \cdot 10 \cdot 0,6 \cdot 6J = 144J$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε, από 0-t₁ για την στεφάνη και παίρνουμε:

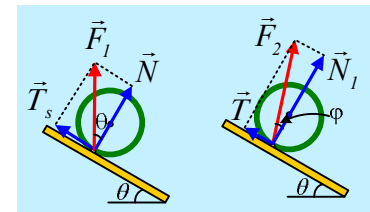
$$K_1 - K_0 = W_w + W_N + W_T \rightarrow K_1 - 0 = W_w + 0 + 0 \rightarrow K_1 = 144J$$

- ν) Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό, υποθέτοντας ότι η δύναμη F από την άρθρωση είναι κατακόρυφη. Ν' και Τ' οι αντιδράσεις των αντίστοιχων δυνάμεων που ασκούνται στη στεφάνη από την δοκό και $\vec{F}'_2$ η συνισταμένη τους. Όλες οι δυνάμεις είναι κατακόρυφες εκτός από την $\vec{F}'_2$, που δεν γνωρίζουμε κάτι.



Ας το ελέγξουμε.

Με βάση το i) ερώτημα η συνισταμένη της N και της $T_s=15N$, είναι η κατακόρυφη δύναμη F_1 . Αν μικρύνει το μέτρο της τριβής στην τιμή $T=12N$ και ταυτόχρονα μεγαλώσει το μέτρο της κάθετης αντίδρασης N_1 , θα πάρουμε το δεξιό σχήμα δίπλα, όπου η γωνία που σχηματίζει η F_2 με την N_1 , η γωνία φ , θα είναι μικρότερη της θ , αφού:



$$\varepsilon \varphi \varphi = \frac{T}{N_1} = \frac{12}{32} < \frac{T_s}{N} = \frac{15}{20} = \varepsilon \varphi \theta$$

Αλλά τότε η διεύθυνση της F_2 , άρα και της αντίδρασής της $\vec{F}'_2$ δεν θα είναι κατακόρυφη.

Τότε όμως η υπόθεσή μας ότι η δύναμη από την άρθρωση είναι κατακόρυφη είναι εσφαλμένη, αφού η ράβδος δεν μπορεί να δέχεται μόνο μία πλάγια δύναμη και να ισορροπεί. Με άλλα λόγια αν η δύναμη $\vec{F}'_2$ δεν είναι κατακόρυφη (που δεν είναι...) θα μας δίνει μια οριζόντια συνιστώσα και για να έχουμε ισορροπία, θα πρέπει η άρθρωση να ασκεί μια δύναμη που και αυτή να έχει οριζόντια συνιστώσα, ώστε να εξουδετερώνει την οριζόντια συνιστώσα της $\vec{F}'_2$.

Σχόλια:

- 1) Στη στεφάνη ασκείται δύναμη στατικής τριβής, τόσο κατά την αρχική ισορροπία της, όσο και κατά την κύλισή της. Το μέτρο όμως, αυτής της τριβής δεν είναι το ίδιο. Κατά την ισορροπία έχουμε στατική τριβή μέτρου $T_s=15N$, ενώ κατά την κύλιση στατική τριβή $T=12N$.

- 2) Μιλώντας για την κινητική ενέργεια της στεφάνης, δεν κάναμε καμιά αναφορά από ποια εξίσωση παρέχεται, αφού θέλαμε να δείξουμε το πρόβλημα με την αφαίρεση από την ύλη της δυναμικής του στερεού σώματος. Πρόβλημα έχουμε και με την ενέργεια, λόγω στροφικής κίνησης, αλλά στο παρόν πρόβλημα... το ντριπλάραμε ☺.

Αν πάντως κάποιος μαθητής δοκίμαζε την «γνωστή» κινητική ενέργεια

$$K_I = \frac{I}{2} M v_{cm}^2$$

Βρίσκοντας $K_I = 72\text{J}$, μη γνωρίζοντας τα περί κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής, θα συνειδητοποιούσε ότι ... κάποιο λάκκο έχει η φάβα...

dmargaris@gmail.com