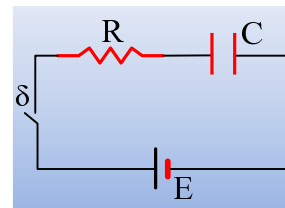


Πάμε να φορτίσουμε έναν πυκνωτή;

Ένα κύκλωμα RC

Στο διπλανό κύκλωμα τη στιγμή $t=0$ κλείνουμε το διακόπτη, με στόχο να φορτίσουμε έναν αρχικά αφόρτιστο πυκνωτή.

- i) Πόσο είναι τελικά το μέγιστο φορτίο Q_0 που αποκτά ο πυκνωτής;
- ii) Ποια χρονική στιγμή ο πυκνωτής έχει φορτίο $\frac{1}{2} Q_0$;
- iii) Τι τελικά ποσοστό της παρεχόμενης ενέργειας από την πηγή, αποθηκεύεται στον πυκνωτή;



Απάντηση:

- i) Εφαρμόζοντας τον 2^ο κανόνα του Kirchhoff στο κύκλωμα παίρνουμε:

$$E - iR - V_c = 0 \quad \text{ή} \quad E - iR - \frac{q}{C} = 0 \quad \text{ή}$$

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q - E = 0 \quad (1)$$

η οποία είναι μια διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$A \frac{dx}{dt} + Bx + C = 0 \quad (2)$$

Η εξίσωση (2) έχει λύση της μορφής:

$$x = \frac{-C}{B} \left(1 - e^{-\frac{B}{A}t} \right) \quad (3)$$

Οπότε με βάση την εξίσωση (3) εδώ έχουμε:

$$q = EC \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (4)$$

Η παραπάνω εξίσωση μας δίνει ότι:

Για $t=0 \rightarrow q=0$, ενώ

Για $t \rightarrow \infty$ τότε $q \rightarrow CE$

Συνεπώς η γραφική της παράσταση είναι αυτή του παρακάτω σχήματος, αφού είναι μια καμπύλη, που ξεκινά από το μηδέν και τείνει ασυμπτωτικά στην τιμή CE σε άπειρο (θεωρητικά) χρόνο.

Ας έρθουμε τώρα στην εξίσωση (3). Ο εκθέτης, θα πρέπει να είναι ένας καθαρός αριθμός (χωρίς

διαστάσεις) συνεπώς η παράσταση $\frac{B}{A}$ θα πρέπει να έχει μονάδες s^{-1} ή ισοδύναμα η παράσταση $\frac{A}{B}$ έχει

διαστάσεις χρόνου και στο S.I. θα έχει μονάδες seconds. Την παράσταση αυτή, μπορούμε να

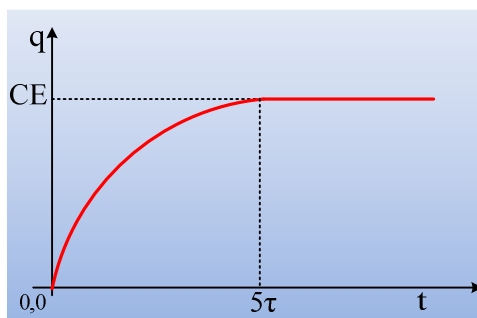
ονομάσουμε λοιπόν σταθερά χρόνου ορίζοντας $\tau = \frac{A}{B}$, οπότε η εξίσωση (3) να γραφεί :

$$x = \frac{-C}{B} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

ή ισοδύναμα η (4) γίνεται:

$$q = EC \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (5)$$

Συνεπώς θεωρητικά, ο πυκνωτής χρειάζεται άπειρο χρόνο για φόρτιση, αλλά πρακτικά η φόρτισή του έχει ολοκληρωθεί μετά από χρόνο $t_1 = 5\tau = 5RC$. Το μέγιστο δε φορτίο που θα αποκτήσει ο πυκνωτής, είναι $Q_0 = CE$.



ii) Με αντικατάσταση στην σχέση (4) $q = \frac{1}{2} Q_0$, παίρνουμε:

$$\frac{CE}{2} = EC \left(1 - e^{-\frac{t_1}{RC}} \right) \rightarrow e^{-\frac{t_1}{RC}} = \frac{1}{2} \rightarrow -\frac{t_1}{RC} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow t_1 = RC \ln 2$$

iii) Η συνολική ενέργεια που προσφέρει η πηγή στο κύκλωμα, μέχρι την πλήρη φόρτιση του πυκνωτή είναι:

$$W_{\pi} = Q_0 \cdot E = CE^2$$

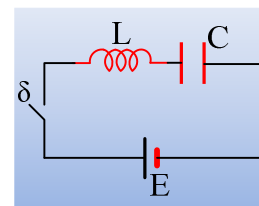
Η ενέργεια εξάλλου που αποθηκεύεται στον πυκνωτή είναι $W_c = \frac{1}{2} CE^2$, συνεπώς το 50% της παρεχόμενης ενέργειας αποθηκεύεται στον πυκνωτή, η υπόλοιπη μετατρέπεται σε θερμότητα πάνω στον αντιστάτη R.

Σημείωση:

Υπάρχει και ένα μικρό ποσό ενέργειας, που εκπέμπεται με την μορφή ΗΜΚ, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί όμως αμελητέο.

Ένα κύκλωμα LC

Στο διπλανό κύκλωμα το ιδανικό πηνίο έχει αυτεπαγωγή $L=2\text{mH}$ και ο αφόρτιστος πυκνωτής χωρητικότητα $C=20\mu\text{F}$, ενώ $E=10\text{V}$. Σε μια στιγμή κλείνουμε το διακόπτη. Να βρεθούν σε συνάρτηση με το χρόνο:



- i) Το φορτίο του πυκνωτή.
- ii) Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.

Να γίνουν οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

Απάντηση:

Εφαρμόζοντας το 2^ο κανόνα του Kirchhoff, στο κύκλωμα μετά το κλείσιμο του διακόπτη, έχουμε:

$$E - L \frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0 \quad \text{ή}$$

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} q - E = 0 \quad (5)$$

- i) Η παραπάνω εξίσωση, περιγράφει αρμονική μεταβολή του φορτίου, που απλά ο σταθερός όρος, τροποποιεί λίγο την λύση, η οποία είναι της μορφής:

$$q = Q_1 + Q_0 \eta \mu(\omega t + \phi_0)$$

όπου, με βάση τις αρχικές συνθήκες ($t=0$, $q=0$ και $i=0$) παίρνουμε: $Q_1 = Q_0 = CE$ και $\phi_0 = \frac{3\pi}{2}$. Έτσι η

εξίσωση του φορτίου παίρνει τη μορφή:

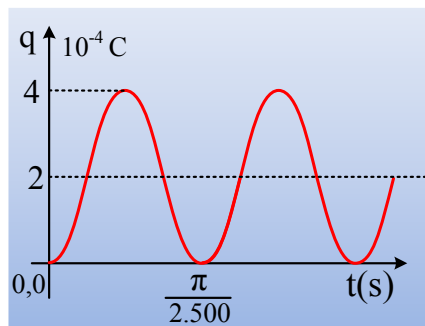
$$q = CE + CE \eta \mu \left(\omega t + \frac{3\pi}{2} \right) \quad (\text{S.I.})$$

Όπου $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 5000 \text{ rad/s}$ και η εξίσωση γίνεται:

$$q = 2 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-4} \eta \mu \left(5000t + \frac{3\pi}{2} \right) \quad \text{ή}$$

$$q = 2 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot 10^{-4} \sigma \nu \nu(5000t) \quad (\text{S.I.}) \quad (6)$$

Ενώ η γραφική παράσταση είναι αυτή του παρακάτω σχήματος.

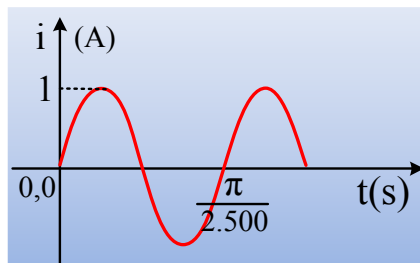


- ii) Παραγωγίζοντας τώρα την (2) παίρνουμε:

$$i = \frac{dq}{dt} = \left(CE + CE\eta\mu\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) \right)' = CE\omega\sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ ή}$$

$$i = 1 \cdot \eta\mu(5000t) \text{ (S.I.)}$$

Με αντίστοιχη γραφική παράσταση:



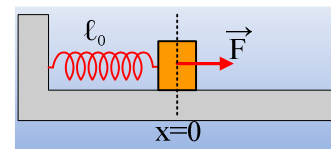
Συμπέρασμα;

Το κύκλωμα, αν αγνοήσουμε τις αντιστάσεις των αγωγών και την εκπομπή ΗΜ ακτινοβολίας, εκτελεί αμείωτη ηλεκτρική ταλάντωση. Η παρουσία του πηνίου, έχει σαν αποτέλεσμα λόγω αυτεπαγωγής, ο πυκνωτής να υπερφορτίζεται σε διπλάσιο φορτίο ($2CE$), οπότε έχουμε μια ταλάντωση του φορτίου του πυκνωτή μεταξύ των τιμών μηδέν και $2CE$, γύρω από την τιμή CE (η τελική τιμή του φορτισμένου πυκνωτή στο πρώτο παράδειγμά μας).

Σχόλιο:

Ποιο είναι το αντίστοιχο μηχανικό ανάλογο;

Ένα σώμα ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου. Σε μια στιγμή δέχεται την επίδραση σταθερής οριζόντιας δύναμης F , όπως στο σχήμα. Τι κίνηση πραγματοποιεί;



Μετά από μετατόπιση κατά x από την αρχική του θέση, ισχύει:

$$F - kx = ma \text{ ή}$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx - F = 0 \quad (7)$$

Προσέξτε την ομοιότητα των εξισώσεων (5) και (7)

Τι κάνει το παραπάνω σώμα; Εκτελεί ΑΑΤ, γύρω από την θέση ισορροπίας, η οποία απέχει κατά $x_1 = \frac{F}{k}$

από τη θέση φυσικού μήκους, με πλάτος επίσης $A = \frac{F}{k}$ και εξίσωση θέσης:

$$x = \frac{F}{k} + \frac{F}{k} \eta\mu\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

Θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική.

Ένα κύκλωμα RLC.

Στο διπλανό κύκλωμα το ιδανικό πηνίο έχει αυτεπαγωγή $L=2\text{mH}$ και ο αφόρτιστος πυκνωτής χωρητικότητα $C=20\mu\text{F}$, ενώ η πηγή έχει ΗΕΔ $E=10\text{V}$. Σε μια στιγμή κλείνουμε το διακόπτη.

Να βρεθεί το φορτίο του πυκνωτή σε συνάρτηση με το χρόνο όταν ο αντιστάτης έχει αντίσταση:

i) $R=2\Omega$.

ii) $R=40\Omega$

Να γίνουν οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

Απάντηση:

Εφαρμόζοντας το 2^ο κανόνα του Kirchhoff παίρνουμε:

$$E - iR - L \frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0 \rightarrow$$

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q - E = 0 \quad (8)$$

Ποια είναι η λύση της παραπάνω εξίσωσης; Η εξίσωση αυτή είναι γραμμική ομογενής 2^{ας} τάξεως και η λύση

της εξαρτάται από την τιμή του λόγου $\Lambda = \frac{R_1}{2L}$. Έτσι:

$$\text{Αν } \Lambda < \omega_0 \text{ ή}$$

$$\frac{R_1}{2L} < \sqrt{\frac{1}{LC}} \text{ ή}$$

$$R_1 < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\text{ή } R_1 < 20\Omega,$$

τότε το κύκλωμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση με εξίσωση φορτίου (λαμβάνοντας υπόψη τις αρχικές συνθήκες, όπου για $t=0$, $q=0$ και $i=0$):

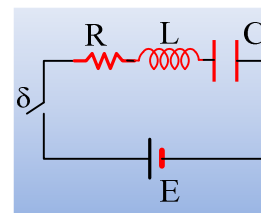
$$q = Q_0 + Q_0 \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \eta\mu\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) \quad (9)$$

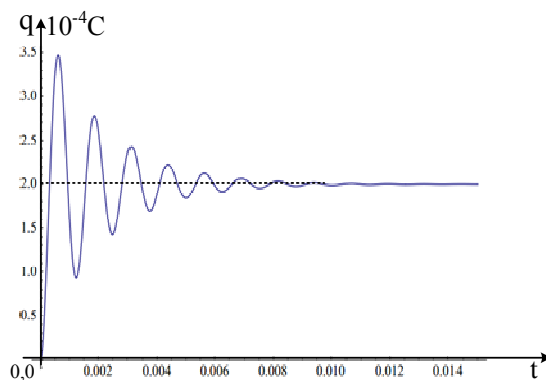
$$\text{με } Q_0 = CE \text{ και } \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \approx 5000 \text{ rad/s}$$

i) Οπότε τελικά αν $R=2\Omega$, η εξίσωση (9) δίνει:

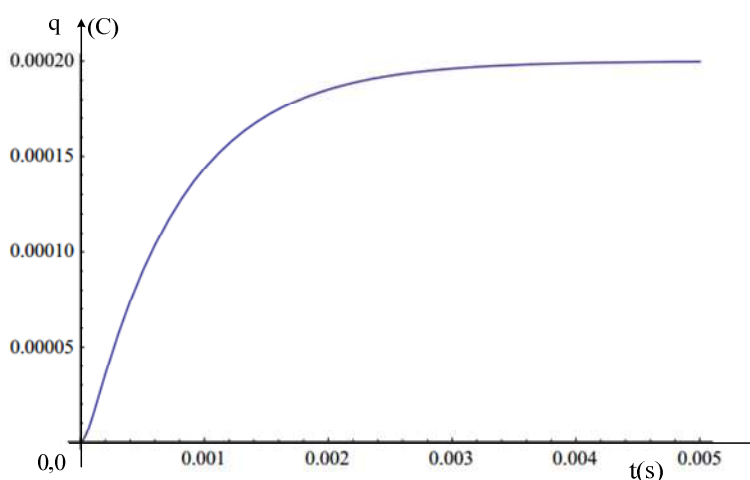
$$q = 2 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-500t} \eta\mu\left(5000t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Και η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι:





- ii) Αν η αντίσταση έχει τιμή $R=40\Omega$, μεγαλύτερη τιμή από αυτήν (R_1), που αντιστοιχεί στην κρίσιμη κατάσταση, τότε δεν υπάρχει ταλάντωση στο κύκλωμα και το φορτίο του πυκνωτή φτάνει στην τιμή $q=2 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ απεριοδικά, όπως στο παρακάτω διάγραμμα.



Συμπέρασμα:

Αν έχουμε ένα κύκλωμα με πυκνωτή και μια πηγή συνεχούς τάσης, κλείνοντας το διακόπτη ο πυκνωτής τελικά φορτίζεται με φορτίο $Q=CE$, αλλά το πώς θα συμβεί αυτό, εξαρτάται από το τι άλλο περιλαμβάνει το κύκλωμα.

- Έτσι στην περίπτωση που το κύκλωμα περιλαμβάνει **μόνο αντιστάτη**, αγνοώντας φαινόμενα αυτεπαγωγής και εκπομπής ΗΜΚ, φτάνουμε να μελετάμε την φόρτιση σαν μια εκθετική αύξηση φορτίου, όπως αποδείχτηκε στην πρώτη εφαρμογή.
- Αν το κύκλωμα περιλαμβάνει ακόμη ένα **ιδανικό πηνίο**, τότε το κύκλωμα εκτελεί ηλεκτρική ταλάντωση και αγνοώντας την εκπομπή ΗΜΚ, το φορτίο μεταβάλλεται αρμονικά γύρω από την τιμή $Q=CE$, αφού η παρουσία του πηνίου προκαλεί υπερφόρτωση του πυκνωτή, λόγω αυτεπαγωγής.
- Αν τώρα έχουμε και αντίσταση στο κύκλωμα, αν μεν είναι αυτή έχει μικρή τιμή, η κατάσταση δείχνει να παίζει σημαντικό ρόλο το πηνίο, απλά η ταλάντωση είναι φθίνουσα, αποκτώντας τελικά ο πυκνωτής φορτίο $Q=CE$, αν όμως έχουμε μεγάλη αντίσταση, τότε αυτή παίζει κυρίαρχο ρόλο και η κατάσταση μοιάζει με την περίπτωση του κυκλώματος RC.

Αν τώρα σκεφτούμε ότι σε κάθε κύκλωμα έχουμε πάντα αντίσταση (έστω οι αγωγοί σύνδεσης), αλλά και πάντα κάποια αυτεπαγωγή (του ίδιου του κυκλώματος), καταλαβαίνουμε ότι λίγο-πολύ πάντα έχουμε μια φθίνουσα ταλάντωση...

Και για την εκπομπή ΗΜΚ; Δείτε κάποιες ιδέες, σε ένα παλιότερο παρόμοιο κείμενο, στη διεύθυνση:

http://dmargarisb.blogspot.gr/2009/07/blog-post_23.html

dmargaris@sch.gr