

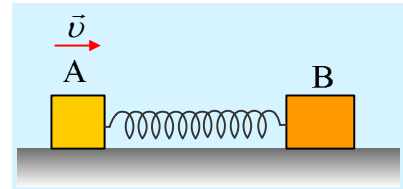
Η ταλάντωση ενός συστήματος

Στην προηγούμενη ανάρτηση [«Μια κρούση και δυο «κρούσεις» ...»](#) υπήρχε ένα ερώτημα για καθηγητές.

Ωρα να απαντηθεί σε μια ανεξάρτητη εκδοχή ...

Η Άσκηση:

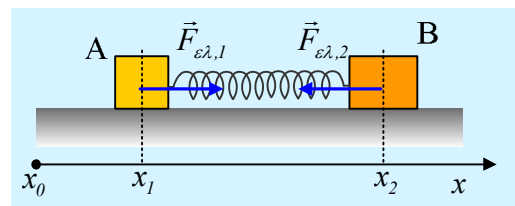
Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δυο σώματα A και B, με μάζες $m_1=1\text{kg}$ και $m_2=2\text{kg}$, δεμένα στα άκρα ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=24\text{N/m}$, το οποίο έχει το φυσικό μήκος του $l_0=0,6\text{m}$. Σε μια στιγμή $t=0$, λόγω κρούσης το σώμα A αποκτά ταχύτητα μέτρου $v=1,8\text{m/s}$, με κατεύθυνση προς το σώμα B.



- i) Να μελετηθεί η κίνηση του συστήματος.
- ii) Να βρεθούν οι συναρτήσεις $v=f(t)$ για τις ταχύτητες των δύο σωμάτων σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνουν οι γραφικές τους παραστάσεις.
- iii) Να βρεθεί η μετατόπιση του σώματος A, τη χρονική στιγμή $t_1=61\pi/36\text{ s}$.

Απάντηση:

- i) Στο διπλανό σχήμα έχουμε πάρει τα δυο σώματα, σε μια τυχαία θέση κατά τη διάρκεια της κίνησης, όπου θεωρώντας την αρχική θέση του σώματος A ως αρχή $x_0=0$ ενός άξονα, με θετικά προς τα δεξιά, τα σώματα βρίσκονται στις θέσεις x_1 και x_2 , με το ελατήριο σε επιμήκυνση κατά Δl (για να μην μπλέξουμε με αρνητικές τιμές $\Delta l \dots$). Θα έχουμε:



$$x_2 - x_1 = l = l_0 + \Delta l = l_0 + y$$

όπου y η επιμήκυνση του ελατηρίου. Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που το ελατήριο ασκεί στα δυο σώματα και οι οποίες τα επιταχύνουν.

Εφαρμόζουμε για κάθε σώμα το 2^ο νόμο του Νεύτωνα και παίρνουμε:

$$ky = m_1 a_1 \quad (1) \quad \text{και} \quad -ky = m_2 a_2 \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (1) με m_2 και την (2) με m_1 και με αφαίρεση $((2)-(1))$ κατά μέλη παίρνουμε:

$$\begin{aligned} m_2 ky &= m_2 m_1 a_1 \quad \text{και} \quad -m_1 ky = m_1 m_2 a_2 \rightarrow \\ -(m_1 + m_2)ky &= m_1 m_2 (a_2 - a_1) \rightarrow \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{d^2 x_2}{dt^2} - \frac{d^2 x_1}{dt^2} \right) + ky &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Αλλά } x_2 - x_1 = l_0 + y \rightarrow \frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} = \frac{dy}{dt} \rightarrow \frac{d^2 x_2}{dt^2} - \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

Οπότε η παραπάνω εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = 0$$

Θέτοντας τώρα $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, όπου μ η **ανηγμένη μάζα** του συστήματος γράφουμε:

$$\mu \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = 0$$

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση, είναι της ίδιας μορφής με τη γνωστή μας εξίσωση που περιγράφει την ΑΑΤ, οπότε κατά αναλογία θα έχουμε:

$$y = A \cdot \eta \mu(\omega t + \phi_0)$$

όπου A η μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου, ενώ για την γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} = \sqrt{\frac{24(1+2)}{1 \cdot 2}} \text{ rad/s} = 6 \text{ rad/s}$$

Εφαρμόζουμε τώρα την ΑΔΟ για το σύστημα για τις στιγμές αμέσως μετά την κρούση και τη στιγμή της μέγιστης συσπείρωσης του ελατηρίου, όπου τα δυο σώματα έχουν ίσες ταχύτητες και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \vec{P}_{\alpha\rho\chi} &= \vec{P}_i \rightarrow m_1 v_i = (m_1 + m_2) v_\kappa \rightarrow \\ v_\kappa &= \frac{m_1 v_i}{m_1 + m_2} = \frac{1 \cdot 1,8}{1+2} \text{ m/s} = 0,6 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Ενώ από την διατήρηση της ενέργειας για το σύστημα, παίρνουμε:

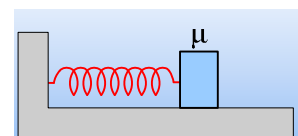
$$\begin{aligned} K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} &= K_\kappa + U_\kappa \rightarrow \\ \frac{1}{2} m_1 v_i^2 + 0 &= \frac{1}{2} m_1 v_\kappa^2 + \frac{1}{2} m_2 v_\kappa^2 + \frac{1}{2} k A^2 \rightarrow \\ A &= \sqrt{\frac{m_1 v_i^2 - (m_1 + m_2) v_\kappa^2}{k}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 1,8^2 - 3 \cdot 0,6^2}{24}} \text{ m} = 0,3 \text{ m} \end{aligned}$$

Εξάλλου για $t=0$, $y=0$, οπότε $\phi_0=0$ ή $\phi_0=\pi$. Εδώ μετά τη στιγμή $t=0$ η «επιμήκυνση» γίνεται αρνητική αφού το ελατήριο συσπειρώνεται, οπότε $\phi_0=\pi$ και η εξίσωση γράφεται:

$$y = 0,3 \cdot \eta \mu(6t + \pi) \quad (S.I.) \quad (3)$$

Σχόλιο:

Παρατηρούμε δηλαδή το ελατήριο να επιμηκώνεται και να συσπειρώνεται αρμονικά με το χρόνο, όπως θα το έκανε, αν το ένα του άκρο ήταν σταθερό και στο άλλο του άκρο υπήρχε υποθετικό σώμα, με μάζα ίση με την **ανηγμένη μάζα** του συστή-



ματος $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{2}{3} \text{ kg}$.

Και τα σώματα, τι κάνουν;

Το κέντρο μάζας C του συστήματος των δύο σωμάτων, τη χρονική στιγμή $t=0$, βρίσκεται στη θέση:

$$x_{ocm} = \frac{m_1 x_{01} + m_2 x_{02}}{m_1 + m_2} = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 0,6}{1 + 2} m = 0,4 m$$

Ενώ κινείται με την ταχύτητα $v_k=0,6m/s$ που υπολογίσαμε παραπάνω, σαν την ελάχιστη κοινή ταχύτητα των δύο σωμάτων. Αν δεν το προτιμάτε αυτό, τότε:

$$v_{ocm} = \frac{m_1 v_{01} + m_2 v_{02}}{m_1 + m_2} = \frac{1 \cdot 1,8 + 2 \cdot 0}{1 + 2} m/s = 0,6 m/s$$

Από κει και πέρα το σύστημα των δύο σωμάτων (+ αβαρές ελατήριο) είναι μονωμένο, οπότε το κέντρο μάζας κινείται ευθύγραμμα και ομαλά και η θέση του θα δίνεται από την εξίσωση:

$$x_{cm} = 0,4 + 0,6t \quad (S.I.) \quad (4)$$

Ας πάρουμε τώρα έναν αδρανειακό παρατηρητή Π ο οποίος βρίσκεται στο κέντρο μάζας C, κινούμενος με την ταχύτητά του C. Αν ο Π παρακολουθήσει το σώμα A μόνο, τι θα δει;

Τη χρονική στιγμή $t_0=0$, βλέπει το σώμα A να κινείται με ταχύτητα (η σχετική ταχύτητα) αλγεβρικής τιμής:

$$v_{l,cm} = v_l - v_{cm} = (1,8 - 0,6) m/s = 1,2 m/s$$

Θα δει ένα σώμα A, που θα είναι δεμένο στο άκρο του ελατηρίου (το άλλο άκρο του οποίου είναι ακίνητο, στο C), το οποίο ταλαντώνεται με πλάτος $A_l = \frac{2A}{3} = 0,2m$. (δες την απόδειξη στο τέλος).

Και επειδή η σταθερά αυτού του ελατηρίου είναι ίση με $k_1 = 3/2k$, (ίδια απόδειξη) συνεπώς το σώμα θα ταλαντώνεται με γωνιακή συχνότητα:

$$\omega_l = \sqrt{\frac{k_l}{m_l}} = \sqrt{\frac{3k}{2m_l}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 24}{2 \cdot 1}} rad/s = 6 rad/s$$

ίση με την γωνιακή συχνότητα μεταβολής του μήκους του ελατηρίου, πράγμα αναμενόμενο, με βάση την παραπάνω ανάλυση.

Βέβαια γνωρίζοντας την κυκλική συχνότητα του σώματος A και την ταχύτητά του τη στιγμή $t=0$, όπου το σώμα περνάει από την θέση ισορροπίας ($F_{ελ}=0$), μπορούμε να πάρουμε:

$$v_{l,cm} = \omega A_l \rightarrow A_l = \frac{v_{l,cm}}{\omega} = \frac{1,2}{6} m = 0,2m.$$

Αλλά τότε για την απομάκρυνση του σώματος A από τη θέση ισορροπίας του, ο παρατηρητής Π, θα έβρισκε την εξίσωση (θετική φορά προς τα δεξιά):

$$x'_l = 0,2 \cdot \eta\mu(6t) \quad \text{μονάδες στο S.I.}$$

Και αντίστοιχα για το σώμα Β, όπου $A_2 = \frac{A}{3} = 0,1m$ και το οποίο για $t=0$ περνά από την θέση ισορροπίας του κινούμενο προς την αρνητική κατεύθυνση, άρα θα έχει αρχική φάση $\varphi=\pi$, θα έγραφε:

$$x'_2 = 0,1 \cdot \eta\mu(6t + \pi) \quad (S.I.)$$

Ενώ όσον αφορά την ταχύτητα του σώματος Β τη στιγμή $t_0=0$, ως προς τον παρατηρητή Π έχουμε:

$$v_{2,cm} = v_2 - v_{cm} = 0 - 0,6m/s = -0,6m/s$$

Όλα αυτά όμως, όπως τα βλέπει ο παρατηρητής Π στο κέντρο μάζας C, ο οποίος κινείται με σταθερή ταχύτητα $v_{cm} = 0,6m/s$, σύμφωνα με την εξίσωση (3). Αλλά τότε για την θέση κάθε σώματος, ως προς έναν ακίνητο παρατηρητή (όπως την «βλέπουμε» εμείς) θα έχουμε:

Σώμα Α:

$$\begin{aligned} x_1 &= (x_{cm} - d_{Acm}) + x'_1 \rightarrow \\ x_1 &= 0,4 + 0,6t - 0,4 + 0,2 \cdot \eta\mu(6t) \rightarrow \\ x_1 &= 0,6t + 0,2 \cdot \eta\mu(6t) \quad (S.I.) \end{aligned}$$

Σώμα Β:

$$\begin{aligned} x_2 &= (x_{cm} + d_{Bcm}) + x'_2 \rightarrow \\ x_2 &= 0,4 + 0,6t + 0,2 + 0,1 \cdot \eta\mu(6t + \pi) \rightarrow \\ x_2 &= 0,6 + 0,6t + 0,1 \cdot \eta\mu(6t + \pi) \quad \text{μονάδες στο S.I.} \end{aligned}$$

ii) Ας επιστρέψουμε στον παρατηρητή Π, στο κέντρο μάζας. Με βάση τις εξισώσεις της απομάκρυνσης παραπάνω θα έχουμε για τις αντίστοιχες ταχύτητες ταλάντωσης των σωμάτων:

$$\begin{aligned} v'_1 &= \omega A_1 \cdot \sigma\upsilon\nu(6t) = 1,2 \cdot \sigma\upsilon\nu(6t) \quad (S.I.) \\ v'_2 &= \omega A_2 \cdot \sigma\upsilon\nu(6t - \pi) = 0,6 \cdot \sigma\upsilon\nu(6t - \pi) \quad (S.I.) \end{aligned}$$

Οπότε οι ταχύτητες για έναν ακίνητο παρατηρητή, παίρνουν την μορφή:

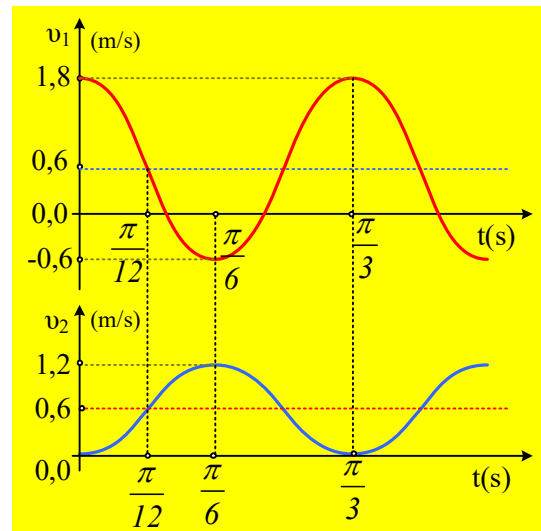
$$\begin{aligned} v_1 &= v_{cm} + v'_1 = 0,6 + 1,2 \cdot \sigma\upsilon\nu(6t) \quad (S.I.) \\ v_2 &= v_{cm} + v'_2 = 0,6 + 0,6 \cdot \sigma\upsilon\nu(6t - \pi) \quad (S.I.) \end{aligned}$$

Θα μπορούσαμε να αποφύγουμε αυτήν την πορεία;

Ναι, αφού μπορούμε να παραγωγίσουμε τις παραπάνω εξισώσεις θέσης:

$$\begin{aligned} v_1 &= (x_1)' = (0,6t + 0,2 \cdot \eta\mu(6t))' = 0,6 + 1,2 \cdot \sigma\upsilon\nu(6t) \quad (S.I.) \text{ και} \\ v_2 &= (x_2)' = (0,6 + 0,6t + 0,1 \cdot \eta\mu(6t + \pi))' = 0,6 + 0,6 \cdot \sigma\upsilon\nu(6t + \pi) \quad (S.I.) \end{aligned}$$

Οι γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων είναι αυτές του παρακάτω σχήματος:



Αξίζει να μείνουμε ένα λεπτό παραπάνω στις παραπάνω γραφικές παραστάσεις και σε κάποιες στιγμές.

Τη χρονική στιγμή $t'_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{12} s$ τα δυο σώματα έχουν την ίδια ταχύτητα και είναι η στιγμή της μέγιστης συσπείρωσης του ελατηρίου κατά $0,3m$ (δείτε την εξίσωση (3) για την επιμήκυνση του ελατηρίου. Για $t=T/4$, παίρνουμε $y=-0,3m$, που σημαίνει μέγιστη συσπείρωση).

Εξάλλου τη στιγμή $t'_2 = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{6} s$ είναι η στιγμή που το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος και οι ταχύτητες είναι αυτές, που αντιστοιχούν στην κεντρική και ελαστική κρούση, μεταξύ των σωμάτων (δείτε και την προηγούμενη ανάρτηση για μαθητές).

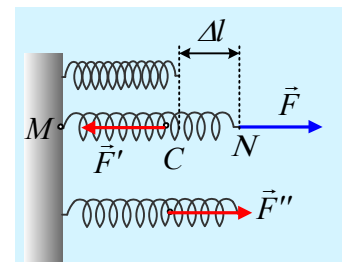
iii) Με βάση την εξίσωση της θέσης του σώματος Α, η μετατόπισή του, ίση και με την θέση του τη στιγμή t_1 θα είναι:

$$\begin{aligned}\Delta x_1 = x_1 &= 0,6t + 0,2 \cdot \eta\mu(6t) = 0,6 \cdot \frac{61\pi}{36} m + 0,2 \cdot \eta\mu\left(6 \cdot \frac{61\pi}{36}\right) m \rightarrow \\ \Delta x_1 &= \frac{61\pi}{60} m + 0,2 \cdot \eta\mu\left(10\pi + \frac{\pi}{6}\right) \\ \Delta x_1 &= 3,2m + 0,1m = 3,3m\end{aligned}$$

Λίγη ακόμη θεωρία:

Έστω ένα ελατήριο, σταθεράς k , στο άκρο του οποίου ασκώντας μια δύναμη F , του προκαλούμε μια επιμήκυνση $\Delta\ell$, όπως στο σχήμα. Από τον νόμο του Hooke παίρνουμε $F=k \cdot \Delta\ell$.

Αν εστιάσουμε τώρα στο τμήμα $NC = 1/3 l$ όπου l το μήκος του ελατηρίου, αυτό έχει επιμηκυνθεί κατά το $1/3$ της συνολικής επιμήκυνσης Δl και ισορροπεί. Συνεπώς δέχεται από το υπόλοιπο τμήμα MC μια δύναμη προς τα αριστερά μέτρου $F' = F$, αλλά τότε του ασκεί και δύναμη F'' ίσου μέτρου, με φορά προς τα δεξιά, όπως στο

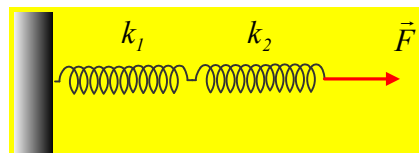


τελευταίο σχήμα. Αλλά τότε το τμήμα (MC), έχει επιμήκυνση ίση με το $2/3$ της συνολικής επιμήκυνσης $\Delta\ell$, με την επίδραση της δύναμης F , ενώ το τμήμα (CN) έχει επιμήκυνση το $1/3$ της συνολικής επιμήκυνσης, συνεπώς:

$$k_1 = \frac{F}{\Delta\ell_1} = \frac{F}{\frac{2}{3}\Delta\ell} = \frac{3F}{2\Delta\ell} = \frac{3}{2}k \quad \text{και}$$

$$k_2 = \frac{F}{\Delta\ell_2} = \frac{F}{\frac{1}{3}\Delta\ell} = \frac{3F}{\Delta\ell} = 3k$$

Γενικότερα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε σύνδεση δύο ελατηρίων σε σειρά με σταθερές k_1 και k_2 , όπου τείνονται από κάποια δύναμη F , όπως στο σχήμα, η οποία τους προκαλεί επιμηκύνσεις $\Delta\ell_1$ και $\Delta\ell_2$ αντίστοιχα. Θα έχουμε:



$$\Delta\ell_{o\lambda} = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 \rightarrow \frac{F}{k_{o\lambda}} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \rightarrow$$

$$\frac{1}{k_{o\lambda}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Σχέση που παραπέμπει στην **παράλληλη** σύνδεση αντιστάσεων αλλά κυρίως στην σύνδεση πυκνωτών σε **σειρά**.

dmargaris@gmail.com