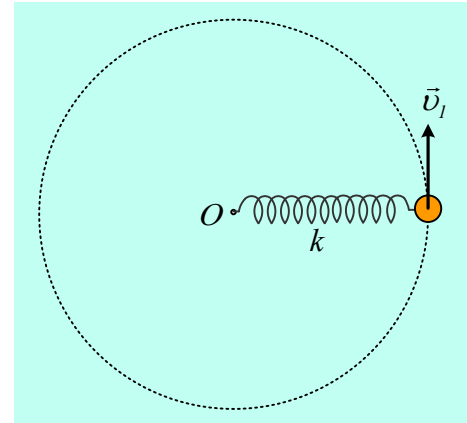


Η αλλαγή της ακτίνας περιφοράς

Ένα σώμα Σ, το οποίο θεωρούμε υλικό σημείο, μάζας $m=1\text{kg}$ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς $k=80\text{N/m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε σταθερό σημείο Ο (το σχήμα σε κάτωψη). Το ελατήριο έχει φυσικό μήκος $l_0=0,4\text{m}$, ενώ η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς είναι $R_1=0,5\text{m}$.



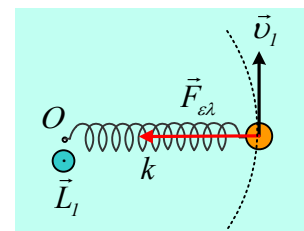
- i) Να υπολογισθεί η ταχύτητα του σώματος Σ και η στροφορμή του ως προς το κέντρο Ο της τροχιάς.
- ii) Σε μια στιγμή $t_0=0$, ασκούμε στο σώμα μια οριζόντια μεταβλητή δύναμη F, η οποία **αρχικά** έχει μέτρο $F_0=1,5\text{N}$ και κατεύθυνση ίδια με την ταχύτητα v_1 , με αποτέλεσμα να αυξάνουμε την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς. Για τη στιγμή t_0^+ , αμέσως μετά την άσκηση της δύναμης, να βρεθούν:
 - α) Η ισχύς της δύναμης F.
 - β) Η γωνιακή επιτάχυνση του σώματος Σ.
 - γ) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σώματος, ως προς το κέντρο Ο της κυκλικής τροχιάς.
- iii) Αν τελικά το σώμα Σ κινείται σε μια νέα κυκλική τροχιά με ακτίνα $R_2=0,6\text{m}$, όταν παύει να ασκείται πάνω του η μεταβλητή δύναμη F, να υπολογιστεί το έργο της δύναμης F.

Απάντηση:

- i) Το σώμα Σ εκτελεί ΟΚΚ με την επίδραση της δύναμης του ελατηρίου, η οποία παίζει το ρόλο της κεντρομόλου.

$$\Sigma F = F_{\kappa} \rightarrow F_{\epsilon\lambda} = m \frac{v_1^2}{R} \rightarrow k(R_1 - l_0) = m \frac{v_1^2}{R_1} \rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{R_1 k (R_1 - l_0)}{m}} = \sqrt{\frac{0,5 \cdot 80 (0,5 - 0,4)}{1}} \text{ m/s} = 2 \text{ m/s}$$



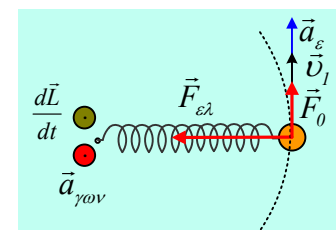
Ενώ η στροφορμή του σώματος Σ, ως προς το Ο, είναι κάθετη στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τον αναγνώστη και μέτρο:

$$L_1 = m v_1 R_1 = 1 \cdot 2 \cdot 0,5 \text{ kgm}^2 / \text{s} = 1 \text{ kgm}^2 / \text{s}$$

- ii) Στο διπλανό σχήμα, έχουν σημειωθεί η δύναμη F_0 , καθώς και η επιτροχια επιτάχυνση που θα προκαλέσει, όπως και η γωνιακή επιτάχυνση, κάθετη στο επίπεδο του επιπέδου, με φορά προς τον αναγνώστη.

- α) Η ισχύς της δύναμης αυτής είναι ίση:

$$P_0 = F_0 v_1 = 1,5 \cdot 2 \text{ W} = 3 \text{ W}$$



β) Η δύναμη του ελατηρίου συνεχίζει να είναι η κεντρομόλος, ενώ η δύναμη F_0 , αλλάζει το μέτρο της ταχύτητας προσδίδοντας στο σώμα Σ , μια επιτρόχια επιτάχυνση, ίδιας κατεύθυνσης και μέτρου:

$$F_0 = m a_{\epsilon\pi} \rightarrow a_{\epsilon} = \frac{F_0}{m} = \frac{1,5}{1} m / s^2 = 1,5 m / s^2.$$

Για τα μέτρα της γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας έχουμε:

$$v = \omega R \rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R \rightarrow a_{\epsilon} = a_{\gamma\omega\nu} R \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{a_{\epsilon}}{R} = \frac{1,5}{0,5} rad / s^2 = 3 rad / s^2$$

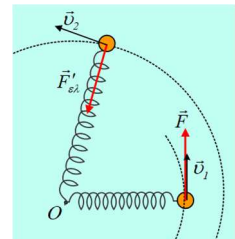
γ) Την ίδια κατεύθυνση με την γωνιακή επιτάχυνση, έχει και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σώματος, ως προς το O , με μέτρο:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau = \tau_{F_{\epsilon\lambda}} + \tau_{F_0} = 0 + F_0 \cdot R_l = 1,5 \cdot 0,5 kgm^2 / s^2 = 0,75 kgm^2 / s^2.$$

iii) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σώμα, στη διάρκεια της επιμήκυνσης του ελατηρίου από 0,5m σε 0,6m:

$$K_2 - K_1 = W_w + W_N + W_{F_{\epsilon\lambda}} + W_F \xrightarrow{W_w=W_N=0}$$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \left(\frac{1}{2} k \cdot (\Delta l_1)^2 - \frac{1}{2} k \cdot (\Delta l_2)^2 \right) + W_F \quad (1)$$



Όπου το βάρος και η κάθετη αντίδραση (η δύναμη στήριξης) του επιπέδου είναι κάθετες στην μετατόπιση, $\Delta l_1 = 0,1m$ η αρχική και $\Delta l_2 = 0,2m$ η τελική επιμήκυνση του ελατηρίου, ενώ η δύναμη του ελατηρίου είναι μια συντηρητική δύναμη, το έργο της οποίας συνδέεται με την μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου με τη σχέση $W_{F_{\epsilon\lambda}} = -\Delta U = \frac{1}{2} k \cdot (\Delta l_1)^2 - \frac{1}{2} k \cdot (\Delta l_2)^2$. Αλλά και για την τελική τροχιά η δύναμη του ελατηρίου παίζει ξανά το ρόλο της κεντρομόλου:

$$\Sigma F = F_{\kappa} \rightarrow F'_{\epsilon\lambda} = m \frac{v_2^2}{R_2} \rightarrow k \cdot \Delta l_2 = m \frac{v_2^2}{R_2} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$W_F = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 - \left(\frac{1}{2} k \cdot (\Delta l_1)^2 - \frac{1}{2} k \cdot (\Delta l_2)^2 \right) \rightarrow$$

$$W_F \frac{1}{2} k \cdot \Delta l_2 \cdot R_2 - \frac{1}{2} m v_1^2 - \left(\frac{1}{2} k \cdot (\Delta l_1)^2 - \frac{1}{2} k \cdot (\Delta l_2)^2 \right) \rightarrow$$

$$W_F = \frac{1}{2} 80 \cdot 0,2 \cdot 0,6 J - \frac{1}{2} 1 \cdot 2^2 J - \frac{1}{2} 80 \cdot 0,1^2 J + \frac{1}{2} 80 \cdot 0,2^2 J = 4 J$$

dmargaris@gmail.com