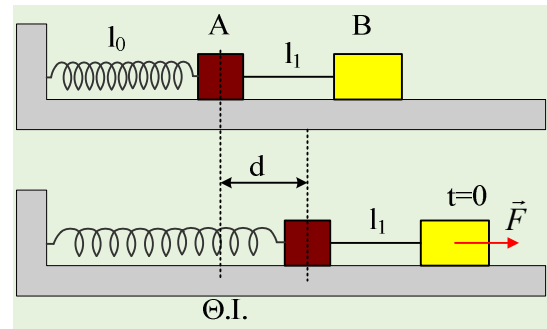


Δύο σώματα στο άκρο νήματος ταλαντώνονται.

Δύο σώματα Α και Β με μάζες $m_1=1\text{kg}$ και $m_2=3\text{kg}$ ηρεμούν σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένα στο άκρο μη εκτατού νήματος μήκους l_1 , ενώ το σώμα Α είναι δεμένο και στο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=40\text{N/m}$. Ασκώντας κατάλληλη οριζόντια δύναμη στο σώμα Β, επιμηκύνουμε το ελατήριο κατά $d=(2/\pi)\text{m}$, όπως στο δεύτερο σχήμα και τη στιγμή $t=0$ το αφήνουμε να κινηθεί, οπότε το σύστημα των δύο σωμάτων, κινούμενο σαν ένα σώμα, εκτελεί αατ με σταθερά επαναφοράς $D=k$.



- Να υπολογιστεί το αρχικό μέτρο της τάσης του νήματος, μόλις αφηθεί το σώμα Β να κινηθεί.
- Να βρεθεί η τάση του νήματος και η ταχύτητα των δύο σωμάτων τη χρονική στιγμή $t_1=0,5\text{s}$.
- Αν τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά τη χρονική στιγμή $t_2=0,75\text{s}$, να βρεθούν:
 - το μήκος του νήματος που συνδέει τα δύο σώματα.
 - Οι ταχύτητες των δύο σωμάτων, αμέσως μετά την κρούση.

Δίνεται $(1/\pi)=0,3$ και $\pi^2=10$.

Απάντηση:

- i) Αφού το σύστημα των δύο σωμάτων εκτελεί αατ, με σταθερά $D=k$, κινείται με γωνιακή συχνότητα

$$\omega_l = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{40}{1+3}} \text{rad/s} \approx \pi \text{ rad/s}.$$

Αλλά τότε τα δυο σώματα αποκτούν αρχική επιτάχυνση $\alpha_0 = -\omega^2 x_1$, όπου $x_1 =$

$A_l = d = \frac{2}{\pi} \text{m} \approx 0,6 \text{m}$, οπότε λαμβάνοντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική, θα έχουμε:

$$\alpha_0 = -\omega^2 A_l = -\pi^2 \cdot \frac{2}{\pi} \text{m/s}^2 \approx -10 \cdot 0,6 \text{m/s}^2 = -6 \text{m/s}^2$$

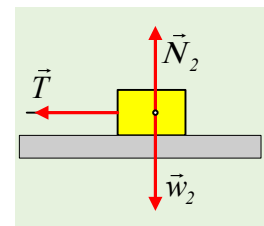
Συνεπώς η τάση του νήματος έχει μέτρο:

$$T = T_0 = m_2 \alpha_0 = 3 \cdot 6 \text{N} = 18 \text{N}$$

- ii) Αφού το σύστημα αρχίζει την ταλάντωσή του από θέση $x=+A$, η απομάκρυνση, κάθε σώματος από την θέση ισορροπίας του, έχει αρχική φάση $\pi/2$, οπότε η εξίσωσή της παίρνει τη μορφή:

$$x = A_l \cdot \eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 0,6 \cdot \eta\mu\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (S.I.)$$

Αλλά τότε για την ταχύτητα και την επιτάχυνση, κάθε σώματος, τη στιγμή t_1 , έχουμε:



$$v_l = \omega A_l \cdot \sigma \nu \left(\pi t + \frac{\pi}{2} \right) = \pi \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \sigma \nu \left(\pi \cdot 0,5 + \frac{\pi}{2} \right) = -2 \text{ m/s}$$

$$a_l = -\omega^2 A_l \cdot \eta \mu \left(\pi t + \frac{\pi}{2} \right) = -\pi^2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \eta \mu(\pi) = 0$$

Το αρνητικό πρόσημο της ταχύτητας μας δείχνει ότι και τα δυο σώματα κινούνται προς την αρνητική κατεύθυνση (προς τα αριστερά) με μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα, αφού περνούν από την θέση ισορροπίας τους, πράγμα που επιβεβαιώνεται και από την μηδενική επιτάχυνσή τους. Αλλά τότε και η τάση του νήματος, θα είναι επίσης μηδενική, αφού για το σώμα Β θα έχουμε: $T = m_2 a_1 = 0$.

Αξίζει να προσθέσουμε εδώ ότι μηδενισμός της τάσης του νήματος σημαίνει ότι το νήμα χαλαρώνει και αυτή η χαλάρωση θα διατηρηθεί και το επόμενο χρονικό διάστημα, όπου το σώμα Α θα ξεκινήσει μια νέα ταλάντωση γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, επιβραδυνόμενο, ενώ το Β θα συνεχίσει την κίνησή του με σταθερή ταχύτητα, εκτελώντας ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, μέχρι να συγκρουστεί με το Α σώμα.

Σημείωση: Προφανώς κάποιος θα μπορούσε να παρατηρήσει ότι ο χρόνος που δόθηκε $t_1 = 0,5 \text{ s}$ αντιστοιχεί στο $1/4$ της περιόδου, αφού $T = 2\pi/\omega = 2 \text{ s}$, οπότε να υπολογίσει την ταχύτητα και την επιτάχυνση άμεσα, χωρίς χρήση χρονοεξισώσεων. Αλλά να μην ξεχνάμε ότι αυτή είναι μια μερική λύση που δεν θα βρίσκει εφαρμογή κάποια άλλη χρονική στιγμή...

iii) Και τώρα ας δοκιμάσουμε να βρούμε, πού θα μπορούσε να βρίσκεται το Α σώμα, δοκιμάζοντας την τύχη μας!!! Η νέα περίοδος ταλάντωσης του Α σώματος είναι ίση:

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m_l}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{40}} = 2\pi \cdot \frac{1}{2\sqrt{10}} \text{ s} = 1 \text{ s}$$

Οπότε για την χρονική στιγμή t_2 έχουμε:

$$t_2 = 0,75 \text{ s} = 0,5 \text{ s} + 0,25 \text{ s} = t_1 + \frac{T_2}{4}$$

Δηλαδή η σύγκρουση πραγματοποιείται στην αριστερή ακραία θέση της ταλάντωσης του σώματος Α, το οποίο έχει μηδενική ταχύτητα (είμαστε τυχεροί!!!)

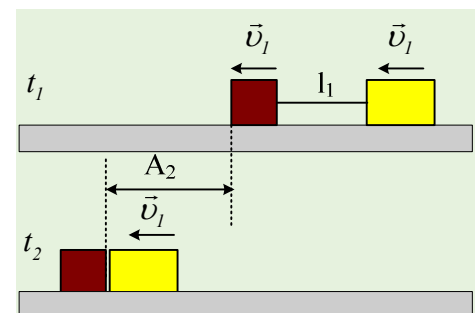
α) Η ταχύτητα v_l του ερωτήματος ii) είναι και η μέγιστη ταχύτητα για την νέα ταλάντωση του σώματος Α με γωνιακή συ-

$$\text{χνότητα: } \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = 2\pi \text{ rad/s}.$$

Οπότε για το νέο πλάτος ταλάντωσης έχουμε:

$$v_l = \omega_2 A_2 \rightarrow A_2 = \frac{v_l}{\omega_2} = \frac{2}{2\pi} \text{ m} = \frac{1}{\pi} \text{ m} = 0,3 \text{ m}$$

Αλλά με βάση το διπλανό σχήμα από t_1 μέχρι t_2 το σώμα Β διανύει απόσταση $s_2 = l_1 + A_2$, κινούμενο με



σταθερή ταχύτητα v_1 , οπότε:

$$s_1 = v_1 \cdot \Delta t \rightarrow l_1 + A_2 = v_1 \cdot (t_2 - t_1) \rightarrow$$

$$l_1 = v_1 \cdot (t_2 - t_1) - A_2 = 2 \cdot (0,75 - 0,5) m - 0,3 m = 0,2 m$$

β) Για τις ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση, γνωρίζοντας ότι πριν την κρούση τα σώματα έχουν ταχύτητες $v_A=0$ και $v_B=v_1$, θα έχουμε:

$$v'_A = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_B = \frac{2 \cdot 3}{1 + 3} (-2) m/s = -3 m/s \text{ και}$$

$$v'_B = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_B = \frac{3 - 1}{1 + 3} (-2) m/s = -1 m/s$$

Οι αρνητικές τιμές υποδηλώνουν ότι και τα δυο σώματα κινούνται προς τα αριστερά μετά την κρούση.

dmargaris@gmail.com