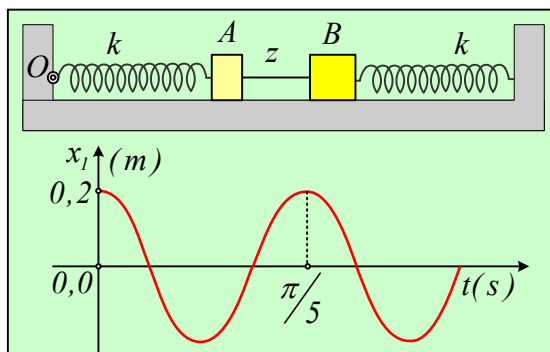


Ας μελετήσουμε τις ταλαντώσεις δύο σωμάτων

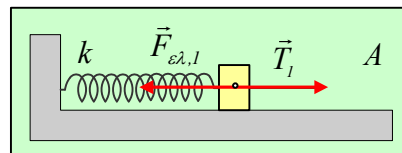
Δύο σώματα Α και Β με μάζες $m_1=1\text{kg}$ και $m_2=4\text{kg}$ αντίστοιχα, τα οποία θεωρούμε υλικά σημεία αμελητέων διαστάσεων, ηρεμούν σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένα στα άκρα δύο όμοιων ιδανικών ελατηρίων, όπως στο σχήμα, όπου το φυσικό μήκος κάθε ελατηρίου είναι 1m , ενώ το μήκος του νήματος που συνδέει τα δύο σώματα είναι $z=0,4\text{m}$. Σε μια στιγμή $t=0$ κόβουμε το νήμα που συνδέει τα δύο σώματα, οπότε κάθε σώμα εκτελεί μια απτ και στο διπλανό διάγραμμα δίνεται η απομάκρυνση του σώματος Α, από την θέση ισορροπίας του, σε συνάρτηση με το χρόνο.



- i) Να υπολογιστεί η σταθερά των ελατηρίων, καθώς και η τάση του νήματος, πριν κοπεί το νήμα.
- ii) Να κάνετε το αντίστοιχο διάγραμμα $x_2=f(t)$ της απομάκρυνσης του σώματος Β, από την δική του θέση ισορροπίας, σε συνάρτηση με το χρόνο.
- iii) Να υπολογιστεί η απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων, τη στιγμή που το αριστερό ελατήριο έχει το ελάχιστο μήκος του, για πρώτη φορά.
- iv) Παίρνουμε έναν οριζόντιο προσανατολισμένο άξονα $x'x$ με αρχή το σημείο Ο του σχήματος (το σημείο πρόσδεσης του αριστερού ελατηρίου). Να βρεθεί η θέση $x'=f(t)$ κάθε σώματος, στον άξονα αυτό, σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνουν, σε κοινούς άξονες, οι γραφικές παραστάσεις των δύο θέσεων.

Απάντηση:

- i) Με βάση το διάγραμμα $x(t)$ για το σώμα Α, προκύπτει ότι ξεκινά την ταλάντωσή του από αρχική θετική απομάκρυνση, πράγμα που σημαίνει ότι κινείται προς τα αριστερά, προς την θέση ισορροπίας του, θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Αυτό όμως σημαίνει ότι το αριστερό ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta l_1=0,2\text{m}$. Αλλά τότε το ελατήριο ασκεί στο Α σώμα δύναμη προς τα αριστερά, όπως στο διπλανό σχήμα, όπου έχουν σχεδιαστεί οι οριζόντιες δυνάμεις που ασκούνται στο Α σώμα (βάρος και κάθετη αντίδραση του επιπέδου ισορροπούν, οπότε δεν σχεδιάστηκαν).



Εξάλλου, με βάση το διάγραμμα της απομάκρυνσης, προκύπτει ότι η περίοδος ταλάντωσης του Α σώματος είναι ίση με $\pi/5\text{ s}$, οπότε:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{\pi/5} \text{ rad/s} = 10 \text{ rad/s} \text{ και}$$

$$D_1 = k = m_1 \omega_1^2 = 1 \cdot 10^2 \text{ N/m} = 100 \text{ N/m}$$

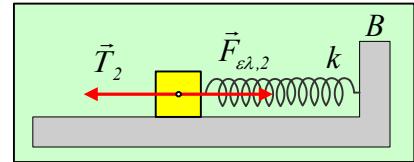
Αλλά τότε από την ισορροπία το σώματος Α, παίρνουμε:

$$\Sigma \vec{F}_A = 0 \rightarrow T_1 - F_{el,1} = 0 \rightarrow T = T_1 = k \cdot \Delta l_1 = 100 \cdot 0,2 \text{ N} = 20 \text{ N}$$

- ii) Ερχόμαστε τώρα στο σώμα Β, με τις αντίστοιχες δυνάμεις όπως στο σχήμα, πράγμα που σημαίνει ότι και

το δεξιό ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά Δl_2 , όπου:

$$\Sigma \vec{F}_B = 0 \rightarrow F_{ελ,2} - T_2 = 0 \xrightarrow{T_1=T_2} \\ k \cdot \Delta l_2 = T_1 = k \cdot \Delta l_1 \rightarrow \Delta l_2 = \Delta l_1 = 0,2m$$



Τότε όμως και το Β σώμα, μόλις κοπεί το νήμα, θα κινηθεί προς την θέση φυσικού μήκους του δεξιού ελατηρίου, προς τα δεξιά με πλάτος $A_2=0,2m$. Η διαφορά με το σώμα Α είναι ότι ξεκινά την ταλάντωσή του από θέση με απομάκρυνση $x=-A_2$, οπότε η αρχική φάση της απομάκρυνσης θα είναι $3\pi/2$.

Με άλλα λόγια, αν η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Α είναι της μορφής:

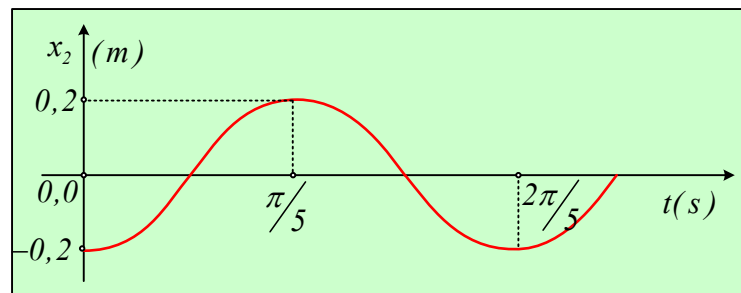
$$x_1 = 0,2 \cdot \eta\mu\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (S.I.)$$

Του Β σώματος, θα είναι της μορφής:

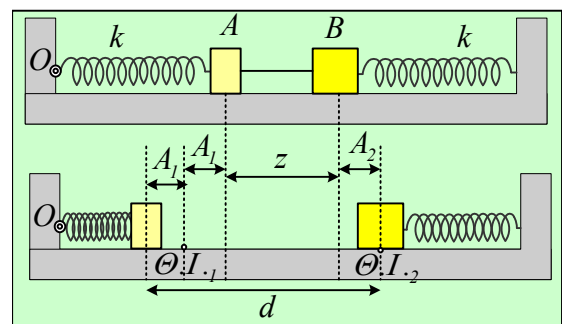
$$x_2 = 0,2 \cdot \eta\mu\left(\omega_2 t + \frac{3\pi}{2}\right) \quad (S.I.)$$

Με $D_2 = k = m_2 \omega_2^2 \rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = \sqrt{\frac{100}{4}} \text{ rad/s} = 5 \text{ rad/s}$ και με περίοδο $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} \rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{5} \text{ s}$.

Με βάση τα παραπάνω η ζητούμενη γραφική παράσταση έχει τη μορφή του παρακάτω σχήματος.



- iii) Το Α σώμα ξεκινά την ταλάντωσή του από την ακραία δεξιά απομάκρυνση, όπου το ελατήριο έχει επιμήκυνση 0,2m. Θα φτάσει στη θέση ισορροπίας με το ελατήριο στο φυσικό μήκος του και στη συνέχεια θα το συσπειρώσει κατά 0,2m, στην ακραία αριστερή θέση του. Αυτό θα συμβεί τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{T_1}{2} = \frac{\pi}{10} \text{ s}$



Τη στιγμή αυτή το σώμα Β θα περνά από την δική του θέση ισορροπίας (το χρονικό αυτό διάστημα αντιστοιχεί στο $\frac{1}{4} T_2$), όπως φαίνεται και στο παραπάνω διάγραμμα, οπότε η απόσταση d των δύο σωμάτων είναι ίση:

$$d = 2A_1 + z + A_2 = 2 \cdot 0,2m + 0,4m + 0,2m = 1m$$

- iv) Το σώμα Α ταλαντώνεται γύρω από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, συνεπώς γύρω από την θέση $x_{01}=1m$. Αλλά τότε η θέση του κάθε στιγμή θα δίνεται από την εξίσωση:

$$x'_1 = x_{01} + x_1 = 1 + 0,2 \cdot \eta\mu\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (S.I.) \quad (1)$$

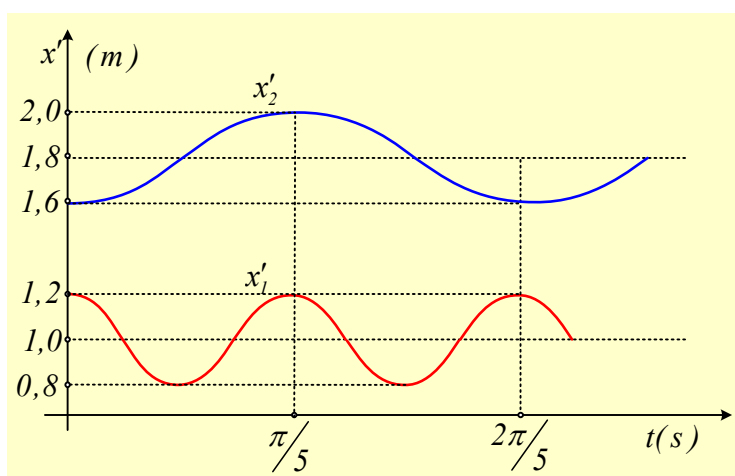
Αντίστοιχα το σώμα Β ταλαντώνεται γύρω από την δική του θέση ισορροπίας η οποία βρίσκεται στη θέση (βλέπε παραπάνω σχήμα):

$$x_{02} = x_{01} + A_1 + z + A_2 = (1 + 0,2 + 0,4 + 0,2)m = 1,8m$$

Με αποτέλεσμα η θέση του κάθε στιγμή να δίνεται από την εξίσωση:

$$x'_2 = x_{02} + x_2 = 1,8 + 0,2 \cdot \eta\mu\left(\omega_1 t + \frac{3\pi}{2}\right) \quad (S.I.) \quad (2)$$

Συνεπώς οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων (1) και (2), παίρνουν τη μορφή του σχήματος.



Σχόλιο:

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι στο παραπάνω διάγραμμα δεν ξεκινήσαμε την βαθμολόγηση του άξονα της θέσης x , από το 0! Πήραμε το σημείο για την θέση ισορροπίας x_{01} (1,0) πολύ κοντά στην αρχή του άξονα για να μπορέσουμε να έχουμε ένα διάγραμμα «λογικό» στο οποίο να απεικονίζονται με σαφήνεια τα στοιχεία που μας ενδιαφέρουν. Αυτό το κάνουμε όταν δεν μας ενδιαφέρουν οι τιμές του άξονα y (παραπάνω ο κατακόρυφος άξονας είναι ο x) γύρω από το μηδέν αλλά σε μια περιοχή αρκετά μακρύτερα. Φανταστείτε στο παραπάνω παράδειγμα να είχαμε ταλάντωση του σώματος Α γύρω από την θέση $x_{01}=1.200m$ με πλάτος $0,2m$ και εμείς να ξεκινούσαμε τη βαθμολογία του άξονα με αρχή το μηδέν. Για δοκιμάστε το...

dmargaris@gmail.com