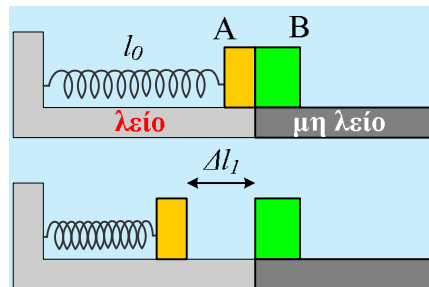


Δυο σώματα σε δύο επίπεδα

Δυο σώματα A και B με μάζας $m_1=1\text{kg}$ και $m_2=3\text{kg}$ αντίστοιχα, ηρεμούν σε οριζόντιο επίπεδο, στη διαχωριστική επιφάνεια, όπου αριστερά το επίπεδο είναι λείο, ενώ δεξιά όχι, όπως στο σχήμα. Το σώμα A είναι δεμένο στο άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k , που έχει το φυσικό του μήκος. Εκτρέπουμε το σώμα A προς τα αριστερά συμπιέζοντας το ελατήριο κατά $\Delta l_1=(1/\pi)\text{m}$ και για $t=0$ το αφήνουμε να κινηθεί. Τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά, τη χρονική στιγμή $t_1=0,25\text{s}$, ενώ η κρούση είναι ακαριαία.



Δίνεται ότι τα δυο σώματα παρουσιάζουν με το μη λείο επίπεδο τον ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,5$, η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{m/s}^2$ και $\pi^2\approx 10$.

- i) Να υπολογιστεί η σταθερά του ελατηρίου.
- ii) Ποιες οι ταχύτητες και οι επιταχύνσεις των δύο σωμάτων, αμέσως μετά την κρούση;
- iii) Να εξετάσετε αν μετά την κρούση, το σώμα A αποκτήσει κάποια στιγμή επιτάχυνση ίση με την επιτάχυνση του B σώματος. Μήπως στη διάρκεια της κίνησής του στο λείο επίπεδο, αποκτήσει επιτάχυνση του ίδιου μέτρου με την επιτάχυνση του B σώματος;
- iv) Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων, τη χρονική στιγμή $t_2=0,5\text{s}$.
- v) Να εξετάσετε αν τα δύο σώματα θα ξανασυγκρουστούν. Το συνολικό διάστημα που θα διανύσει το A σώμα, μετά την κρούση, μέχρι να σταματήσει, είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από $4A_2$, όπου A_2 το πλάτος ταλάντωσής του μετά την κρούση;

Απάντηση:

- i) Η κίνηση του σώματος A μόλις αφεθεί να κινηθεί είναι ΑΑΤ, με πλάτος $A_0=\Delta l_1$, οπότε ο χρόνος για να μεταβεί το σώμα από την ακραία του θέση ($v=0$) στη θέση ισορροπίας, η οποία ταυτίζεται με την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, είναι ίσος με το $1/4$ της περιόδου:

$$t_1 = \frac{T}{4} \rightarrow T = 4t_1 = 4 \cdot 0,25\text{s} = 1\text{s} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \text{ rad/s}$$

Αλλά τότε η σταθερά του ελατηρίου, ίση την σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης, είναι ίση:

$$k = D = m_1 \omega^2 = m_1 \cdot 4\pi^2 = 1 \cdot 4 \cdot 10\text{N/m} = 40\text{N/m}$$

- ii) Το σώμα A ελάχιστα πριν την κρούση έχει ταχύτητα (η προς τα δεξιά κατεύθυνση θεωρείται θετική):

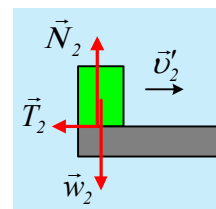
$$v_1 = \omega A_1 = 2\pi \cdot \frac{1}{\pi} \text{m/s} = 2\text{m/s}$$

Συνεπώς οι ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση θα είναι:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{1 - 3}{1 + 3} \cdot 2m/s = -1m/s \text{ και}$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2 \cdot 1}{1 + 3} \cdot 2m/s = 1m/s$$

Η κρούση έγινε στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, οπότε το σώμα Α δεν έχει επιτάχυνση, αμέσως μετά την κρούση ($a_1=0$), ενώ παίρνοντας τις δυνάμεις στο σώμα Β, όπως στο σχήμα, βρίσκουμε, αφού $\Sigma F_y=0$ και $N=m_2g$:



$$\Sigma \vec{F}_2 = m_2 \vec{a}_2 \rightarrow -T_2 = m_2 a_2 \rightarrow -\mu m_2 g = m_2 a_2 \rightarrow$$

$$a_2 = -\mu g = -0,5 \cdot 10m/s^2 = -5m/s^2.$$

- iii) Η επιτάχυνση του σώματος Α κατά την κίνησή του στο λείο επίπεδο, δίνεται από την εξίσωση $a_1 = -\omega^2 x$, οπότε με θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η επιτάχυνση είναι πάντα θετική για την κίνηση στο λείο οριζόντιο επίπεδο (κατευθύνεται προς την θέση ισορροπίας). Κατά συνέπεια σε καμιά θέση στο λείο επίπεδο, δεν θα αποκτήσει επιτάχυνση ίση με αυτή του Β σώματος. Μόλις όμως μπει στο μη λείο επίπεδο, λόγω τριβής, θα αποκτήσει την ίδια αρχικά επιτάχυνση με το σώμα Β, αφού αυτή δεν εξαρτάται από την μάζα του σώματος ($a = -\mu g$).

Στο λείο επίπεδο, το μέτρο της επιτάχυνσης παίρνει τιμές μεταξύ $0 \leq |\alpha_1| \leq \omega^2 A_2$, όπου A_2 το πλάτος της νέας ταλάντωσης μετά την κρούση. Αλλά το πλάτος αυτό, συνδέεται με το μέτρο της ταχύτητας στη θέση ισορροπίας:

$$|v'_1| = \omega A_2 \rightarrow A_2 = \frac{|v'_1|}{\omega} = \frac{1}{2\pi} \cdot 1m = \frac{1}{2\pi} m \approx 0,16m$$

Ίσο δηλαδή με το μισό του αρχικού πλάτους ταλάντωσης. Να σημειωθεί ότι η περίοδος δεν αλλάζει εξαιτίας της κρούσης. Αλλά τότε για να γίνει η επιτάχυνση ίση κατά μέτρο με $5m/s^2$, το σώμα πρέπει να βρεθεί σε απομάκρυνση:

$$|\alpha_1| = \omega^2 |x_1| \rightarrow |x_1| = \frac{5}{4\pi^2} m = 0,125m < A_2$$

Πράγμα που θα συμβεί δυο φορές σε χρόνο μισής περιόδου, μετά την κρούση.

- iv) Για την κίνηση του Β σώματος, μετά την κρούση ισχύουν οι εξισώσεις:

$$v_2 = v'_2 + a_2 \cdot \Delta t \quad \text{και} \quad \Delta x_2 = v'_2 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a_2 \cdot (\Delta t)^2$$

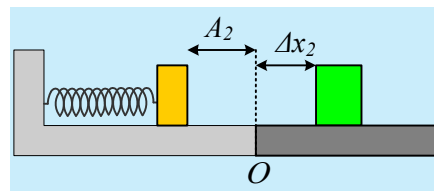
Τη στιγμή που το σώμα Β σταματά, $v_2=0$, οπότε με αντικατάσταση στις παραπάνω εξισώσεις, βρίσκουμε για τη διάρκεια της κίνησής του και την συνολική μετατόπισή του:

$$0 = v'_2 + \alpha_2 \cdot \Delta t \rightarrow \Delta t_{o\lambda} = -\frac{v'_2}{\alpha_2} = -\frac{1}{-5} s = 0,2s$$

Το σώμα Β δηλαδή σταματά τη στιγμή $t_B = t_1 + \Delta t_{o\lambda} = 0,25s + 0,2s = 0,45s$.

$$\Delta x_{2,o\lambda} = v'_2 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a_2 \cdot (\Delta t)^2 = 1 \cdot 0,2m + \frac{1}{2} (-5) \cdot 0,2^2 m = 0,1m$$

Αλλά τη στιγμή $t_2 = 0,5s = t_1 + T/4$ το σώμα Α βρίσκεται στην αριστερή ακραία θέση του απέχοντας κατά $A_2 = 0,16m$ από την θέση ισορροπίας του, ενώ το Β σώμα έχει ήδη σταματήσει σε απόσταση $0,1m$ από αυτήν. Συνεπώς η απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων, είναι:



$$d = A_2 + \Delta x_{2,o\lambda} = 0,16m + 0,1m = 0,26m$$

- ν) Το σώμα Α τη χρονική στιγμή $t_3 = t_2 + T/4 = 0,75s$ περνά στο δεξιό μη λείο επίπεδο, με αρχική ταχύτητα ίση με την αρχική ταχύτητα που είχε αποκτήσει και το σώμα Β, μετά την κρούση, εκτελώντας πια φθίνουσα ταλάντωση, λόγω της ασκούμενης τριβής.

Αν δεν υπήρχε το ελατήριο, τότε θα αποκτούσε επιτάχυνση $a' = -5m/s^2$, θα επιβραδυνόταν και θα σταματούσε αφού θα μετατοπιζόταν κατά $0,1m$, όπως και το Β. Τώρα όμως δέχεται και την δύναμη του ελατηρίου με φορά αντίθετη της ταχύτητας, με αποτέλεσμα να επιβραδυνθεί γρηγορότερα και να σταματήσει σε απόσταση, μικρότερη από $0,1m$ από το Ο, με αποτέλεσμα να μην υπάρξει νέα σύγκρουση των σωμάτων.

Εναλλακτικά με βάση την διατήρηση της ενέργειας για τα δύο σώματα, στην κίνησή τους στο μη λείο επίπεδο, ξεκινώντας με την ίδια αρχική ταχύτητα (v_0), θα έχουμε:

$$\text{Σώμα Β: } K_{\text{αρχ}} = Q_{\theta} \rightarrow \frac{1}{2} m_2 v_o^2 = \mu m_2 g \cdot \Delta x_2 \rightarrow v_o^2 = \mu g \cdot \Delta x_2$$

$$\text{Σώμα Α: } K_{\text{αρχ}} = U_{\text{ελ}} + Q_{\theta} \rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_o^2 = \mu m_1 g \cdot x_1 + \frac{1}{2} k x_1^2 \rightarrow v_o^2 = 2\mu g \cdot x_1 + \frac{k x_1^2}{2m_1}$$

Τα πρώτα μέλη ίσα, οπότε:

$$2\mu g \cdot \Delta x_2 = 2\mu g \cdot x_1 + \frac{k x_1^2}{2m_1} \rightarrow \Delta x_2 = x_1 + \frac{k x_1^2}{2\mu g m_1} \rightarrow \Delta x_2 > x_1$$

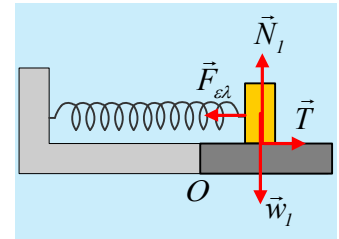
Με άλλα λόγια, στην περίπτωση του Α σώματος, ένα μέρος της αρχικής κινητικής ενέργειας θα αποθηκευτεί στο ελατήριο, οπότε μόνο ένα μέρος της ενέργειας αυτής θα μετατραπεί σε θερμική ενέργεια λόγω του έργου της τριβής ολίσθησης.

Με βάση τα παραπάνω η ταχύτητα του σώματος Α θα μηδενιστεί, στο μη λείο επίπεδο, σε απομάκρυνση x_1 μικρότερη από $0,1m$. Αλλά τότε στη θέση αυτή θα δέχεται τις δυνάμεις του σχήματος, όπου η δύναμη του ελατηρίου θα έχει μέτρο:

$$F_{ελ} = kx_l < 40 \cdot 0,1N \rightarrow F_{ελ} < 4N$$

Ενώ η τριβή ολίσθησης (δεχόμαστε ότι περίπου τόση είναι και η οριακή τριβή), αν κινηθεί προς τα αριστερά, θα είχε μέτρο:

$$T_{l,ολ} = \mu m_l g = 0,5 \cdot 1 \cdot 10N = 5N$$



Συνεπώς το σώμα δεν θα κινηθεί προς τα αριστερά, θα δεχτεί τριβή στατική, με μέτρο ίσο με το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου (<4N) και θα παραμείνει ακίνητο έχοντας συνολικά, μετά την κρούση, διάνυση διάστημα:

$$s_{ολ} = A_2 + A_2 + x_l = 2A_2 + x_l \rightarrow$$

$$s_{ολ} < 2A_2 + A_2 \rightarrow s_{ολ} < 3A_2$$

Συνεπώς και διάστημα μικρότερο από $4A_2$.

dmargaris@gmail.com